

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 2018 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次で定義される数列 $\{I_n\}$ を考える。

$$I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 数列 $\{I_n\}$ が次の式を満たすことを証明せよ。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) $\frac{d}{dx} (\cos x \sin^{n-1} x)$ を $\sin x$ と n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{I_n\}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(5) 数列 $\{I_n\}$ の一般項を求めよ。

第 2 問

実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき, a を z の実部といい $a = \operatorname{Re} z$ と書き表し, b を z の虚部といい $b = \operatorname{Im} z$ と書き表す。また z の絶対値を $|z|$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 複素数 $u = \frac{5 + 5\sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ を極形式で表せ。

(2) 条件 $\operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w \geq 0, 40 \leq |w| \leq 135$ を満たす複素数 w 全体のなす領域

$$D = \{w \mid \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w \geq 0, 40 \leq |w| \leq 135\}$$

を考える。このとき, $z^3 u$ が D に属するような複素数 z 全体のなす領域

$$A = \{z \mid z^3 u \in D\}$$

を図示せよ。

(3) 複素数 z が領域 A 上を動くとき, z と -2 との距離が最小になるような z を求めよ。解答に極形式を用いてよい。

第 3 問

5人に「あなたの年齢は20代ですか」という質問をする。ただし、各回答者は、「はい」か「いいえ」と答える前にさいころを振り、1または2の目が出たときは正直に答え、3以上の目が出たときは、うその答えを言うものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 5人のうち20代が1人もいないとき、「はい」と答える人数が3である確率を求めよ。
- (2) 5人のうち20代がちょうど1人のとき、「はい」と答える人数が3である確率を求めよ。
- (3) 5人の回答者は街頭調査で出会った人たちとする。ただし、同じ人と繰り返し出会うこともあるとする。街頭調査で出会う人が20代である確率が p のとき、「はい」と答える人数が3である確率を求めよ。
- (4) (3)の確率が最大となる p を求めよ。

第 4 問

r を正の実数とする。半径がそれぞれ $r, 2r, 3r$ の 3 つの球 C_1, C_2, C_3 と、これらすべてに接する平面 α がある。ただし、3 つの球はすべて平面 α の同じ側で接しているものとする。すなわち、3 つの球のそれぞれの中心を結ぶ線分は、いずれも平面 α と交わらないものとする。3 つの球 C_1, C_2, C_3 と平面との接点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする。空間において、基点 O を定め、 $\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OP_2} = \vec{p} + \vec{a}$, $\overrightarrow{OP_3} = \vec{p} + \vec{b}$ とすると、 $|\vec{a}| = 3r$, $|\vec{b}| = 4r$ であり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° である。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q を平面 α 上にある点とする。球 C_2 の中心と点 Q との距離を d_1 , 球 C_3 の中心と点 Q との距離を d_2 とする。このとき、 $d_1 + d_2$ を最小にする点 Q の位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ を用いて表せ。

(2) 3 つの球 C_1, C_2, C_3 の中心を通る平面 β と、平面 α との交線を l とする。 l を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ と媒介変数 t を用いて媒介変数表示せよ。

(3) 点 R を直線 l 上にある点とする。球 C_2 の中心と点 R との距離を最小にする点 R の位置ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ を用いて表せ。

第 5 問

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = (a+1)x$, $g(x) = ax^2$ とする。ただし, a は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を座標平面上に図示せよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ。また, 面積 S が最小となる a と, そのときの面積を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S が最小となるとき, この図形を直線 $y = f(x)$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)