

九州大学 2018 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次で定義される数列 $\{I_n\}$ を考える。

$$I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 数列 $\{I_n\}$ が次の式を満たすことを証明せよ。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) $\frac{d}{dx} (\cos x \sin^{n-1} x)$ を $\sin x$ と n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{I_n\}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(5) 数列 $\{I_n\}$ の一般項を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $x = \pi/2 - t$ の置換で $\sin$ と $\cos$ を入れ替える。(2) は $d(\cos^{2n} x)$ を用いる部分積分。(3)(4) は指定された導関数を積分して漸化式を作り、(5) で初項から積を展開する。

【解答】

(1) $x = \pi/2 - t$ と置くと

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx &= \int_{\pi/2}^0 \cos^n t (-dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \end{aligned}$$

である。

(2)

$$d(\cos^{2n} x) = -2n \sin x \cos^{2n-1} x dx$$

だから

$$I_n = - \int_0^{\pi/2} x d(\cos^{2n} x)$$

と書ける。部分積分により

$$\begin{aligned} I_n &= - [x \cos^{2n} x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \end{aligned}$$

となる。最後に (1) を用いた。

(3) 積の微分と $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x \sin^{n-1} x) &= -\sin^n x + (n-1) \cos^2 x \sin^{n-2} x \\ &= (n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x\end{aligned}$$

である。

(4) (3) の n を $2n$ に置き換え、 0 から $\pi/2$ まで積分する。境界値は両端で 0 なので

$$0 = (2n-1)I_{n-1} - 2nI_n$$

となる。よって

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

である。

(5)

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

であり、漸化式を繰り返すと

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{{}_{2n}C_n}{4^n} \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

を得る。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) で I_n を偶数乗の標準積分へ直すところまでは同じ。(4) では指定された導関数を介さず、 $\sin^{2n} x$ に直接部分積分を行って Wallis 型の漸化式を導く。(5) は二重階乗から階乗へ整理する。

【解答】

(1) 置換 $t = \pi/2 - x$ により

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

である。

(2) 定義式で部分積分すると境界項が 0 になり、

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx$$

を得る。

(3) 直接微分して

$$\frac{d}{dx}(\cos x \sin^{n-1} x) = (n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x$$

である。

(4)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \sin x \, dx$$

に対して部分積分を行う。 $u = \sin^{2n-1} x$ 、 $dv = \sin x \, dx$ とすると、境界項は 0 で

$$I_n = (2n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x \cos^2 x \, dx$$

となる。 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ より

$$I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$$

だから

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

である。

(5) $I_0 = \pi/2$ と見れば

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

である。ここで

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n!, \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

だから

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{{}_n C_n}{4^n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

となる。

【総評】 三角関数の偶数乗積分を、対称性・部分積分・漸化式で一般項まで導く誘導問題である。目安時間は 22～26 分。積分記号は全て独立表示にし、(2)(4) で境界項が 0 になる理由を明記する。解法 1 は指定された導関数を積分し、解法 2 は $\sin^{2n} x$ へ直接部分積分する。最終式は二重階乗、階乗、中央の組合せ数の 3 表現が一致する。

【第 2 問】

実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき、 a を z の実部といい $a = \operatorname{Re} z$ と書き表し、 b を z の虚部といい $b = \operatorname{Im} z$ と書き表す。また z の絶対値を $|z|$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 複素数 $u = \frac{5 + 5\sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ を極形式で表せ。

(2) 条件 $\operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w \geq 0, 40 \leq |w| \leq 135$ を満たす複素数 w 全体のなす領域

$$D = \{w \mid \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w \geq 0, 40 \leq |w| \leq 135\}$$

を考える。このとき、 $z^3 u$ が D に属するような複素数 z 全体のなす領域

$$A = \{z \mid z^3 u \in D\}$$

を図示せよ。

(3) 複素数 z が領域 A 上を動くとき、 z と -2 との距離が最小になるような z を求めよ。解答に極形式を用いてよい。

▶ 解法 1

【方針】

u の絶対値と偏角を求める。 $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ と置き、 $z^3 u \in D$ を半径条件と偏角条件へ分ける。3 乗による 3 つの扇形を図示し、 -2 に最も近い扇形の端点と半径を確認する。

【解答】

(1) 分子と分母は

$$5 + 5\sqrt{3}i = 10 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

および

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

だから

$$u = 5 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

である。

(2)

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と置くと

$$z^3 u = 5\rho^3 \left\{ \cos \left(3\theta + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{12} \right) \right\}$$

である。半径条件は

$$40 \leq 5\rho^3 \leq 135$$

より

$$2 \leq \rho \leq 3$$

となる。偏角条件は

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3\theta + \frac{\pi}{12} \leq \pi + 2k\pi$$

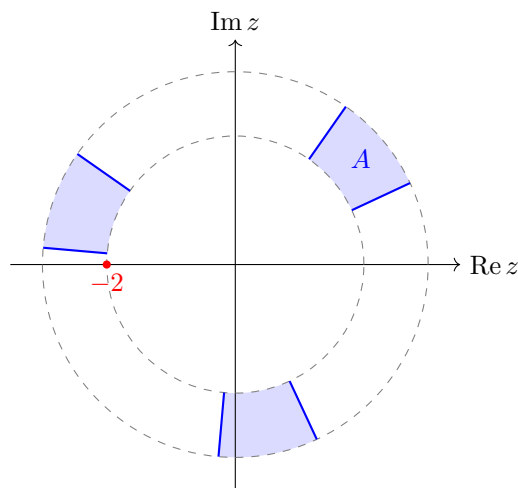
なので

$$\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$$

である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ では

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{36} &\leq \theta \leq \frac{11\pi}{36}, \\ \frac{29\pi}{36} &\leq \theta \leq \frac{35\pi}{36}, \\ \frac{53\pi}{36} &\leq \theta \leq \frac{59\pi}{36} \end{aligned}$$

の 3 領域になる。



(3) -2 の偏角は π である。これに最も近い領域は第 2 の扇形で、最も近い境界角は

$$\theta = \frac{35\pi}{36}$$

である。この半直線への -2 の射影の半径は

$$2 \cos \frac{\pi}{36} < 2$$

であり、領域の半径は 2 以上なので、最短点は内側の円周上にある。よって

$$z = 2 \left(\cos \frac{35\pi}{36} + i \sin \frac{35\pi}{36} \right)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は極形式で写像 $z \mapsto z^3 u$ の逆像を求める。(3) では距離の 2 乗 $\rho^2 + 4 + 4\rho \cos \theta$ を角度、半径の順に最小化し、図形的な射影を式で確認する。

【解答】

(1) 絶対値と偏角の商から

$$|u| = 5, \quad \arg u = \frac{\pi}{12}$$

である。したがって

$$u = 5 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

となる。

(2) $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ と書けば

$$z^3 u = 5\rho^3 \left\{ \cos \left(3\theta + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{12} \right) \right\}$$

である。 D の半径は 40 以上 135 以下、偏角は $\pi/2$ 以上 π 以下なので、

$$2 \leq \rho \leq 3$$

かつ

$$\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$$

となる。したがって A は、解法 1 の図に示した 3 つの閉じた扇形領域である。

(3)

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

に対して

$$|z + 2|^2 = \rho^2 + 4 + 4\rho \cos \theta$$

である。3 つの扇形のうち $\theta = \pi$ に最も近いのは

$$\frac{29\pi}{36} \leq \theta \leq \frac{35\pi}{36}$$

であり、この範囲では $\theta = 35\pi/36$ のとき距離が最小になる。

この角度を固定すると

$$|z + 2|^2 = \rho^2 + 4 - 4\rho \cos \frac{\pi}{36}$$

である。平方完成すると、制約がなければ

$$\rho = 2 \cos \frac{\pi}{36} < 2$$

で最小になる。しかし $2 \leq \rho \leq 3$ だから、制約内では $\rho = 2$ が最小である。よって

$$z = 2 \left(\cos \frac{35\pi}{36} + i \sin \frac{35\pi}{36} \right)$$

となる。

【総評】 複素数の 3 乗写像が、半径を 3 乗し偏角を 3 倍することを使う領域問題である。目安時間は 24~28 分。半径条件は $2 \leq |z| \leq 3$ 、偏角条件は 120 度ずつ離れた 3 扇形になる。図では内外の円と 6 本の境界半直線を明示した。(3) は偏角が近いだけで決めず、距離の 2 乗を半径についても最小化し、射影半径が 2 未満のため内側円周に制約されることを確認する。

【第 3 問】

5 人に「あなたの年齢は 20 代ですか」という質問をする。ただし、各回答者は、「はい」か「いいえ」と答える前にさいころを振り、1 または 2 の目が出たときは正直に答え、3 以上の目が出たときは、うその答えを言うものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 5 人のうち 20 代が 1 人もいないとき、「はい」と答える人数が 3 である確率を求めよ。
- (2) 5 人のうち 20 代がちょうど 1 人のとき、「はい」と答える人数が 3 である確率を求めよ。
- (3) 5 人の回答者は街頭調査で出会った人たちとする。ただし、同じ人と繰り返し出会うこともあるとする。街頭調査で出会う人が 20 代である確率が p のとき、「はい」と答える人数が 3 である確率を求めよ。
- (4) (3) の確率が最大となる p を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

20 代なら「はい」の確率は $1/3$ 、20 代でなければ $2/3$ である。(1)(2) は「はい」の人数を場合分けし、(3) は 1 人あたりの周辺確率を求めて二項分布にする。(4) は「はい」の確率 q に変数を替えて微分する。

【解答】

(1) 20 代でない人が「はい」と答える確率は、うそを言う確率

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

である。よって

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

となる。

(2) 20 代の 1 人が「はい」と答える確率は $1/3$ 、他の 4 人が「はい」と答える確率は $2/3$ である。20 代の人の答えで分けると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ & + \frac{2}{3} \cdot {}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{88}{243} \end{aligned}$$

である。

(3) 1 人が「はい」と答える確率は

$$p \cdot \frac{1}{3} + (1-p) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2-p}{3}$$

である。したがって 5 人中 3 人が「はい」と答える確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{2-p}{3}\right)^3 \left(\frac{1+p}{3}\right)^2$$

となる。

(4)

$$q = \frac{2-p}{3}$$

と置くと $1/3 \leq q \leq 2/3$ であり、最大化する部分は

$$h(q) = q^3(1-q)^2$$

である。微分すると

$$h'(q) = q^2(1-q)(3-5q)$$

だから $q = 3/5$ で最大になる。よって

$$\frac{2-p}{3} = \frac{3}{5}$$

から

$$p = \frac{1}{5}$$

を得る。

▶ 解法 2

【方針】

「いいえ」「はい」の確率をそれぞれ定数項・一次項とする生成多項式を使い、 x^3 の係数として (1)~(3) を統一する。(4) は重み付き相加平均・相乗平均で微分せずに最大化する。

【解答】

回答 1 人について、「いいえ」の確率を定数項、「はい」の確率を x の係数とする。

(1) 全員が 20 代でないので、5 人の回答の生成多項式は

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^5$$

である。「はい」が 3 人となる確率は x^3 の係数だから

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

である。

(2) 20 代の 1 人と、それ以外の 4 人に分けると

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^4$$

となる。 x^3 の係数は

$$\frac{1}{3} \cdot {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot {}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{88}{243}$$

である。

(3) 1 人あたりの「はい」の確率を

$$q = \frac{2-p}{3}$$

とすると、「いいえ」の確率は

$$1-q = \frac{1+p}{3}$$

である。よって x^3 の係数は

$${}_5C_3 q^3 (1-q)^2 = {}_5C_3 \left(\frac{2-p}{3}\right)^3 \left(\frac{1+p}{3}\right)^2$$

となる。

(4) 正の 5 数

$$\frac{q}{3}, \frac{q}{3}, \frac{q}{3}, \frac{1-q}{2}, \frac{1-q}{2}$$

の和は 1 である。相加平均・相乗平均より

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 \left(\frac{1-q}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

で、等号は

$$\frac{q}{3} = \frac{1-q}{2}$$

のときに成り立つ。したがって $q = 3/5$ 、ゆえに

$$p = \frac{1}{5}$$

である。

【総評】 ランダム回答方式を二項分布へ直す問題である。目安時間は 18～22 分。20 代なら「はい」は正直な $1/3$ 、20 代でなければ「はい」はうその $2/3$ となる点を最初に固定する。解法 1 は場合分けと微分、解法 2 は生成多項式と相加平均・相乗平均を使う。(2) は 20 代の 1 人が「はい」か「いいえ」かの 2 場合があり、(4) は変数 $q = (2-p)/3$ の範囲内で等号が成立する。

【第 4 問】

r を正の実数とする。半径がそれぞれ $r, 2r, 3r$ の 3 つの球 C_1, C_2, C_3 と、これらすべてに接する平面 α がある。ただし、3 つの球はすべて平面 α の同じ側で接しているものとする。すなわち、3 つの球のそれぞれの中心を結ぶ線分は、いずれも平面 α と交わらないものとする。3 つの球 C_1, C_2, C_3 と平面との接点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする。空間において、基点 O を定め、 $\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OP_2} = \vec{p} + \vec{a}$, $\overrightarrow{OP_3} = \vec{p} + \vec{b}$ とすると、 $|\vec{a}| = 3r$, $|\vec{b}| = 4r$ であり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° である。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q を平面 α 上にある点とする。球 C_2 の中心と点 Q との距離を d_1 、球 C_3 の中心と点 Q との距離を d_2 とする。このとき、 $d_1 + d_2$ を最小にする点 Q の位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ を用いて表せ。
- (2) 3 つの球 C_1, C_2, C_3 の中心を通る平面 β と、平面 α との交線を l とする。 l を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ と媒介変数 t を用いて媒介変数表示せよ。
- (3) 点 R を直線 l 上にある点とする。球 C_2 の中心と点 R との距離を最小にする点 R の位置ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

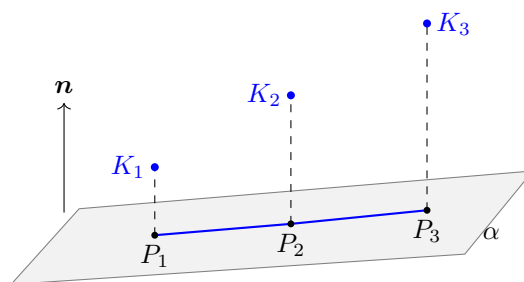
平面 α の球側を向く単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を導入する。(1) は C_2 の中心を平面に関して反射し、距離和を直線距離へ変える。(2) は中心平面の法線成分を 0 にし、(3) は接平面内の射影を直線へ正射影する。

【解答】

平面 α の球がある側を向く単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。3 球の中心を K_1, K_2, K_3 とすれば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK_1} &= \mathbf{p} + r\mathbf{n}, \\ \overrightarrow{OK_2} &= \mathbf{p} + \mathbf{a} + 2r\mathbf{n}, \\ \overrightarrow{OK_3} &= \mathbf{p} + \mathbf{b} + 3r\mathbf{n}\end{aligned}$$

である。位置関係の概略は次の通りである。



- (1) K_2 を α に関して反射した点を K'_2 とすると

$$\overrightarrow{OK'_2} = \mathbf{p} + \mathbf{a} - 2r\mathbf{n}$$

である。平面上の点 Q では $K_2Q = K'_2Q$ なので、三角不等式の等号が成り立つ、すなわち線分 K'_2K_3 と α の交点で距離和が最小になる。

線分を K'_2 からの比 λ で表すと、法線成分は

$$-2r + 5r\lambda$$

である。これが 0 となる $\lambda = 2/5$ を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{p} + \frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$$

を得る。

(2) 平面 β 上の点は

$$\mathbf{p} + r\mathbf{n} + u(\mathbf{a} + r\mathbf{n}) + v(\mathbf{b} + 2r\mathbf{n})$$

と表せる。これが α 上にある条件は

$$1 + u + 2v = 0$$

である。 $v = t$ 、 $u = -1 - 2t$ と置けば交線 l は

$$\overrightarrow{OX} = \mathbf{p} - \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \quad (t \text{ は実数})$$

となる。

(3) K_2 から α までの法線距離 $2r$ は一定なので、 α 内では接点 P_2 と直線 l の距離を最小にすればよい。直線上の点との差の平面内成分は

$$-2\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - 2\mathbf{a})$$

である。ここで

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6r^2, \quad |\mathbf{b} - 2\mathbf{a}|^2 = 28r^2$$

なので、距離の 2 乗を最小にする値は

$$t = \frac{2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{a})}{|\mathbf{b} - 2\mathbf{a}|^2} = -\frac{6}{7}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{OR} = \mathbf{p} + \frac{5}{7}\mathbf{a} - \frac{6}{7}\mathbf{b}$$

を得る。

▶ 解法 2

【方針】

接平面内で $\mathbf{a}$ 方向を第 1 軸に取り、

$$\mathbf{a} = 3r\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b} = 2r\mathbf{e}_1 + 2\sqrt{3}r\mathbf{e}_2$$

と座標化する。(1) は反射後の線分比、(2) は法線成分、(3) は 1 変数二次式の頂点で求める。

【解答】

平面 α 内の正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ とし、

$$\mathbf{a} = 3r\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b} = 2r\mathbf{e}_1 + 2\sqrt{3}r\mathbf{e}_2$$

と置く。これは長さ $3r, 4r$ 、なす角 60° を満たす。

(1) K_2 の反射点は平面の下側 $2r$ 、 K_3 は上側 $3r$ にある。両点を結ぶ線分は、下側から全体の $2/5$ 進んだところで平面と交わる。したがって平面内の座標は

$$\mathbf{p} + \mathbf{a} + \frac{2}{5}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

であり、

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{p} + \frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$$

となる。

(2) K_1 を基準に平面 β を

$$\mathbf{p} + r\mathbf{n} + u(\mathbf{a} + r\mathbf{n}) + v(\mathbf{b} + 2r\mathbf{n})$$

と表す。法線座標が 0 となる条件 $1 + u + 2v = 0$ に $v = t$ を代入すると

$$\overrightarrow{OX} = \mathbf{p} - \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - 2\mathbf{a})$$

を得る。

(3) 上の座標では

$$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = -4r\mathbf{e}_1 + 2\sqrt{3}r\mathbf{e}_2$$

である。直線 l 上の点から接点 P_2 への平面内距離の 2 乗は

$$\begin{aligned} D(t)^2 &= r^2 \left\{ (-6 - 4t)^2 + (2\sqrt{3}t)^2 \right\} \\ &= r^2 (28t^2 + 48t + 36) \end{aligned}$$

となる。この二次式は

$$t = -\frac{48}{56} = -\frac{6}{7}$$

で最小である。よって

$$\overrightarrow{OR} = \mathbf{p} - \mathbf{a} - \frac{6}{7}(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) = \mathbf{p} + \frac{5}{7}\mathbf{a} - \frac{6}{7}\mathbf{b}$$

となる。

【総評】 3 球の中心を、接平面内の成分と法線成分に分ける空間ベクトル問題である。目安時間は 28～34 分。概略図で接点・中心・法線の対応を確認してから式へ入る。(1) は反射による三角不等式の等号、(2) は中心平面の法線成分 0、(3) は接点から交線への正射影が本質である。解法 1 は内積、解法 2 は平面内の直交座標で二次式を作り、どちらも $t = -6/7$ を与える。

【第 5 問】

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = (a+1)x$, $g(x) = ax^2$ とする。ただし、 a は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を座標平面上に図示せよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ。また、面積 S が最小となる a と、そのときの面積を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S が最小となるとき、この図形を直線 $y = f(x)$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

交点を求めて直線と放物線の上下関係を図示し、面積を積分する。面積は a で微分して最小化する。最小時 $a = 2$ の回転体は、回転軸方向の座標と軸からの距離を導入し、軸に垂直な円板の体積を積分する。

【解答】

(1) 交点は

$$(a+1)x = ax^2$$

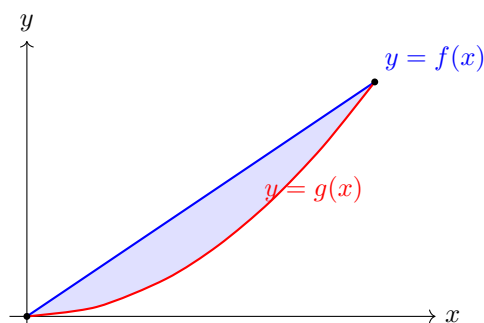
より

$$x = 0, \quad x = \frac{a+1}{a}$$

である。その間では

$$(a+1)x - ax^2 = x(a+1-ax) > 0$$

だから直線が上、放物線が下にある。形状は次の通りである。



(2) 面積は

$$S = \int_0^{(a+1)/a} \{(a+1)x - ax^2\} dx$$

である。よって

$$S = \frac{(a+1)^3}{6a^2}$$

となる。微分すると

$$S'(a) = \frac{(a+1)^2(a-2)}{6a^3}$$

だから、 S は $0 < a < 2$ で減少し、 $a > 2$ で増加する。したがって

$$a = 2, \quad S_{\min} = \frac{9}{8}$$

である。

(3) $a = 2$ のとき領域は

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \quad 2x^2 \leq y \leq 3x$$

であり、回転軸は $y = 3x$ である。軸方向の座標を

$$s = \frac{x + 3y}{\sqrt{10}}$$

とする。放物線上の点 $(x, 2x^2)$ から軸までの距離は

$$R(x) = \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{10}}$$

で、軸方向の座標は

$$s(x) = \frac{x + 6x^2}{\sqrt{10}}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1 + 12x}{\sqrt{10}} > 0$$

である。したがって軸に垂直な断面は重複なく円板となり、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{3/2} R(x)^2 ds \\ &= \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \int_0^{3/2} (3x - 2x^2)^2 (1 + 12x) dx \end{aligned}$$

である。ここで

$$\int_0^{3/2} (3x - 2x^2)^2 (1 + 12x) dx = \frac{81}{8}$$

だから

$$V = \frac{81\pi}{80\sqrt{10}}$$

となる。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は交点と差の符号で領域を決める。(2) は

$$a + 1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 1$$

に相加平均・相乗平均を適用して微分せずに最小化する。(3) は領域内の微小面積を回転軸まわりの薄い円筒殻として積分する。

【解答】

(1) 交点は

$$(0, 0), \quad \left(\frac{a+1}{a}, \frac{(a+1)^2}{a} \right)$$

であり、その間では

$$f(x) - g(x) = x(a+1-ax) > 0$$

である。したがって解法 1 の図のように、直線を上側、放物線を下側とする領域になる。

(2) 積分から

$$S = \frac{(a+1)^3}{6a^2}$$

である。一方、

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 1 = a + 1$$

に相加平均・相乗平均を用いると

$$\frac{a+1}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$$

だから

$$\frac{(a+1)^3}{a^2} \geq \frac{27}{4}$$

である。等号は $a/2 = 1$ 、すなわち $a = 2$ のときに成り立つ。よって

$$a = 2, \quad S_{\min} = \frac{9}{8}$$

となる。

(3) $a = 2$ の領域では、点 (x, y) から軸 $y = 3x$ までの距離は

$$\frac{3x - y}{\sqrt{10}}$$

である。軸に平行な微小面積 dA を回転すると、半径がこの距離の薄い円筒殻を作る。したがって

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \int_0^{3/2} \int_{2x^2}^{3x} (3x - y) dy dx$$

である。内側から積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^{3/2} \int_{2x^2}^{3x} (3x - y) dy dx &= \int_0^{3/2} \left(\frac{9}{2}x^2 - 6x^3 + 2x^4 \right) dx \\ &= \frac{81}{160} \end{aligned}$$

となる。よって

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \cdot \frac{81}{160} = \frac{81\pi}{80\sqrt{10}}$$

である。

【総評】 面積最小と斜め軸まわりの回転体を組み合わせた問題である。目安時間は 25～30 分。図で直線が上、放物線が下になる区間を確認してから積分する。(2) は微分と相加平均・相乗平均の両方で $a = 2$ 、 $S = 9/8$ を検算できる。(3) は縦切りをそのまま円板にできないため、解法 1 では軸方向座標、解法 2 では軸からの距離による円筒殻を使う。全ての積分を独立表示にし、座標変換の倍率を明記した。