

九州大学 2018 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標空間において、 xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geq 1$ を満たす部分を C とする。また、 z 軸上の点 $A(0, 0, 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき、直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、 d は正の定数とする。

▶ 解法 1

【方針】

双曲線上の点を $P = (u, v, 0)$ と置き、直線 AP を媒介変数表示する。平面 $x = d$ との交点 (d, Y, Z) から u, v を消去し、最後に $u \geq 1$ が与える端点条件を戻す。

【解答】

双曲線 C 上の点を

$$P = (u, v, 0), \quad u^2 - v^2 = 1, \quad u \geq 1$$

と置く。直線 AP 上の点は

$$(0, 0, 1) + \lambda(u, v, -1)$$

と表せる。平面 $x = d$ との交点では $\lambda u = d$ だから $\lambda = d/u$ である。交点を (d, Y, Z) と書くと

$$Y = \frac{dv}{u}, \quad Z = 1 - \frac{d}{u}$$

となる。

ここで

$$\frac{v^2}{u^2} = 1 - \frac{1}{u^2}, \quad \frac{d}{u} = 1 - Z$$

なので

$$Y^2 = d^2 - (1 - Z)^2$$

すなわち

$$Y^2 + (Z - 1)^2 = d^2$$

を得る。また $u \geq 1$ より

$$1 - d \leq Z < 1$$

である。 $u = 1$ に対応する点 $(d, 0, 1 - d)$ は含まれ、 $u \rightarrow \infty$ に対応する $Z = 1$ 上の 2 点は含まれない。

したがって軌跡は、平面 $x = d$ 上で中心 $(d, 0, 1)$ 、半径 d の円のうち

$$1 - d \leq Z < 1$$

を満たす下半円弧である。

▶ 解法 2

【方針】

傾きに相当する比 $k = v/u$ を媒介変数にする。双曲線の条件から $-1 < k < 1$ と $1/u = \sqrt{1-k^2}$ を得て、交点を円の標準的な媒介表示へ直す。

【解答】

$$k = \frac{v}{u}$$

と置く。 $u^2 - v^2 = 1$ 、 $u \geq 1$ から

$$-1 < k < 1, \quad \frac{1}{u} = \sqrt{1-k^2}$$

である。直線 AP と平面 $x = d$ の交点を (d, Y, Z) とすると、解法 1 と同様に

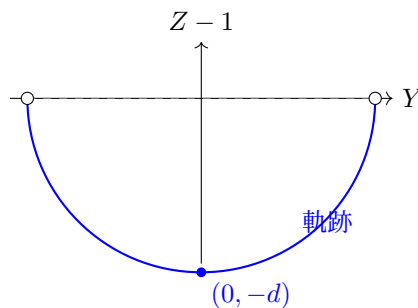
$$Y = \frac{dv}{u} = dk, \quad Z = 1 - \frac{d}{u} = 1 - d\sqrt{1-k^2}$$

となる。したがって

$$Y^2 + (Z-1)^2 = d^2k^2 + d^2(1-k^2) = d^2$$

である。

k が -1 から 1 まで動くと、交点は次の下半円弧を動く。



$k = 0$ の下端は含まれる。一方、 $k = \pm 1$ は取れないので、直径の両端は含まれない。元の座標に戻すと、求める軌跡は

$$x = d, \quad Y^2 + (Z-1)^2 = d^2, \quad 1-d \leq Z < 1$$

である。

【総評】 空間内の軌跡を、直線の媒介変数と双曲線の条件から円弧へ変換する問題である。目安時間は 16~20 分。円の方程式だけでなく、下端は含み、 $Z = 1$ に対応する両端は含まないことまで答える。解法 1 は座標 u, v を直接消去し、解法 2 は比 $k = v/u$ によって下半円の媒介表示を得る。図では白丸と黒丸の違いを式の不等号と対応させたい。

【第 2 問】

原点を中心とする半径 3 の半円 $C: x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し、線分 PQ を 2:1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく、かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき、線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。
- (2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。 Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。
- (3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。 U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は同じ高さの 2 点を $(-x, y), (x, y)$ と置き、高さごとの線分 PR の横幅を積分する。(2) は R の軌跡が半径 2 の半円になることから通過領域を決める。(3) は第 1 象限で S, T の右端を比較し、 y 軸に垂直な円板・円環で体積を求める。

【解答】

(1)

$$P = (-x, y), \quad Q = (x, y), \quad x^2 + y^2 = 9$$

と置く。 $PR: RQ = 2:1$ だから

$$R = \frac{P + 2Q}{3} = \left(\frac{x}{3}, y\right)$$

である。高さ y において線分 PR が通る範囲は

$$-\sqrt{9-y^2} \leq X \leq \frac{1}{3}\sqrt{9-y^2}$$

なので

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \frac{4}{3} \int_0^3 \sqrt{9-y^2} dy \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{9\pi}{4} = 3\pi \end{aligned}$$

となる。

(2) $P = (-3, 0)$ 、 $Q = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ と置くと

$$R = (-1 + 2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

である。したがって R は

$$(X+1)^2 + Y^2 = 4, \quad Y \geq 0$$

の半円弧上を動く。左端 $P = (-3, 0)$ からこの半円弧へ引いた線分全体は半円板を埋めるので

$$T: (X+1)^2 + Y^2 \leq 4, \quad Y \geq 0$$

である。よって

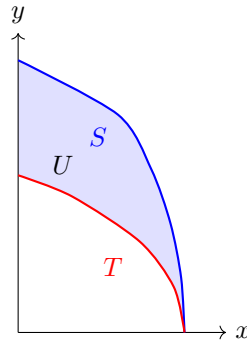
$$\text{Area}(T) = 2\pi$$

となる。

(3) 第 1 象限での S の右端と T の右端は

$$X_S(y) = \frac{1}{3}\sqrt{9-y^2}, \quad X_T(y) = -1 + \sqrt{4-y^2}$$

である。ただし $X_T(y) \geq 0$ となるのは $0 \leq y \leq \sqrt{3}$ である。領域 U は次の青色部分になる。



したがって回転体積は

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \{X_S(y)^2 - X_T(y)^2\} dy + \pi \int_{\sqrt{3}}^3 X_S(y)^2 dy$$

である。すなわち

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{9-y^2}{9} - (-1 + \sqrt{4-y^2})^2 \right\} dy + \pi \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{9-y^2}{9} dy$$

となる。計算すると

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{9-y^2}{9} - (-1 + \sqrt{4-y^2})^2 \right\} dy = \frac{4\pi}{3} - \frac{26\sqrt{3}}{9}$$

および

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{9-y^2}{9} dy = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

だから

$$V = \frac{\pi}{3} (4\pi + 6 - 9\sqrt{3})$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は内分点の軌跡を高さごとの区間または相似変換として捉える。(3) は U を回転する代わりに、 S の第 1 象限部分の回転体から T の第 1 象限部分の回転体を引く。前者は円板法、後者は円筒殻法で計算する。

【解答】

(1) 高さ y における半円の左右端を

$$-\sqrt{9-y^2}, \quad \sqrt{9-y^2}$$

とすると、内分点 R の横座標は右端の $1/3$ である。よって PR の長さは

$$\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$$

となる。これを $0 \leq y \leq 3$ で積分し、

$$\text{Area}(S) = \frac{4}{3} \cdot \frac{9\pi}{4} = 3\pi$$

を得る。

(2) 写像

$$Q \mapsto R = P + \frac{2}{3}(Q - P)$$

は中心 $P = (-3, 0)$ 、比 $2/3$ の相似変換である。半径 3 の半円 C は、中心 $(-1, 0)$ 、半径 2 の半円へ移る。さらに P と弧上の点を結ぶ線分が内部を埋めるので、 T はこの半円板であり、

$$\text{Area}(T) = 2\pi$$

である。

(3) S の第 1 象限部分を回転した体積は

$$V_S = \pi \int_0^3 \frac{9-y^2}{9} dy = 2\pi$$

である。一方、 T の第 1 象限部分は

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4-(x+1)^2}$$

である。これを y 軸のまわりに回転し、円筒殻法を使うと

$$V_T = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{4-(x+1)^2} dx$$

となる。 $u = x+1$ と置けば

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{4-(x+1)^2} dx &= \int_1^2 (u-1) \sqrt{4-u^2} du \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} V &= V_S - V_T \\ &= 2\pi - 2\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} (4\pi + 6 - 9\sqrt{3}) \end{aligned}$$

を得る。

【総評】 線分の通過領域を正しく決め、その差を回転する面積・体積問題である。目安時間は 32~38 分。(1) は高さごとの横幅、(2) は固定点を中心とする相似変換で領域を捉える。(3) では T が第 1 象限に現れる高さが $0 \leq y \leq \sqrt{3}$ に限られる。解法 1 は図と円板・円環法、解法 2 は全体の回転体から円筒殻で求めた部分を引く。二つの体積式が一致することで積分区間と図形認識を相互確認できる。

【第 3 問】

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。 k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。 p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

余り 0 以外を出方から直接数える。余り 1・3 は全て奇数で 3 の個数の偶奇を分け、余り 2 は 2 がちょうど 1 回で残りが奇数の場合に限る。最後に全体から引いて余り 0 を求める。

【解答】

全事象は 4^n 通りである。

積が奇数になるのは、全てのカードが 1 または 3 の場合に限る。その 2^n 通りのうち、3 の個数が偶数なら余り 1、奇数なら余り 3 となる。両者は同数で、それぞれ 2^{n-1} 通りだから

$$q_n = s_n = \frac{2^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

である。

余り 2 となるのは、カード 2 がちょうど 1 回現れ、残りが全て 1 または 3 の場合に限る。2 の位置が n 通り、残りの選び方が 2^{n-1} 通りなので

$$r_n = \frac{n2^{n-1}}{4^n} = \frac{n}{2^{n+1}}$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\ &= 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

となる。

▶ 解法 2

【方針】

余り 0, 1, 2, 3 を状態とし、カードを 1 枚追加したときの遷移を漸化式にする。対称性から $q_n = s_n$ を先に解き、その結果を r_n の漸化式へ代入する。

【解答】

1 回目は各カードが同確率なので

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$$

である。積の余りが 1 になるには、直前の余りが 1 で次に 1 を引くか、直前の余りが 3 で次に 3 を引けばよい。余り 3 についても同様だから

$$q_{n+1} = \frac{q_n + s_n}{4}, \quad s_{n+1} = \frac{q_n + s_n}{4}$$

である。初項から $q_n = s_n$ であり、

$$q_{n+1} = s_{n+1} = \frac{1}{2}q_n$$

となる。よって

$$q_n = s_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

である。

次に余り 2 になるのは、直前の余り 2 に奇数を掛ける場合、または直前の余り 1・3 に 2 を掛ける場合である。したがって

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}(q_n + s_n) = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}}$$

となる。 $r_1 = 1/4$ から帰納的に

$$r_n = \frac{n}{2^{n+1}}$$

を得る。最後に確率の和が 1 であることから

$$p_n = 1 - q_n - r_n - s_n = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

である。

【総評】 4 を法とする積の余りを分類する確率問題である。目安時間は 14～18 分。解法 1 は余り 0 以外を直接数えるため短く、余り 2 が「2 がちょうど 1 回、残りは奇数」に限られる点が要所になる。解法 2 は 4 状態の遷移から漸化式を作り、 $q_n = s_n$ の対称性を使う。最終結果は $n = 1$ を代入して全て $1/4$ になることを確認するとよい。

【第 4 問】

整数 a, b は 3 の倍数ではないとし、

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

3 の倍数でない整数の平方は 3 を法として 1 であることを使う。(2)(3) は整数根・有理根の候補を定数項と最高次係数から絞り、各候補を元の式へ代入する。

【解答】

(1) a, b は 3 の倍数でないので

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

である。したがって

$$f(1) \equiv 2 + 1 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

および

$$f(2) \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

となる。余りはそれぞれ 0, 1 である。

(2) 整数根があれば定数項 1 の約数なので $x = \pm 1$ に限られる。ところが

$$f(1) = a^2 + 2b^2 + 3 > 0$$

であり、

$$f(-1) = a^2 - 2b^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

だから、どちらも 0 ではない。よって整数根は存在しない。

(3) 有理根の候補は

$$\pm 1, \quad \pm \frac{1}{2}$$

である。(2) から ± 1 は除かれる。また

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4b^2 + 5}{4} > 0$$

だから、残る候補は $-1/2$ だけである。代入すると

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 - 4b^2 + 3}{4}$$

なので

$$(2b - a)(2b + a) = 3$$

を得る。整数の因数対

$$(1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$$

を調べると

$$(a, b) = (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$$

となる。いずれも条件を満たし、実際に $x = -1/2$ を根にもつ。

▶ 解法 2

【方針】

有理根の定理を名前だけで使わず、既約分数 $x = -q/p$ を代入して分母・分子の整除関係を直接導く。これにより分子が 1、分母が 2 に限られることを示す。

【解答】

(1) $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ を $f(1), f(2)$ に代入すると

$$f(1) \equiv 0, \quad f(2) \equiv 1 \pmod{3}$$

である。

(2) $x \geq 0$ では $f(x) > 0$ である。整数根 $x < 0$ があると仮定すると

$$x(2x^2 + a^2x + 2b^2) = -1$$

となる。左辺の 2 因子は整数なので $x = -1$ に限られる。しかし

$$f(-1) \equiv 1 \pmod{3}$$

であり矛盾する。よって整数根はない。

(3) 有理根があるとし、互いに素な自然数 p, q を用いて

$$x = -\frac{q}{p}$$

と書く。代入して p^3 を掛けると

$$-2q^3 + a^2q^2p - 2b^2qp^2 + p^3 = 0$$

である。これを

$$p^3 = q(2q^2 - a^2qp + 2b^2p^2)$$

と見ると、 $(p, q) = 1$ より $q = 1$ である。さらに

$$p^3 - 2b^2p^2 + a^2p - 2 = 0$$

すなわち

$$2 = p(p^2 - 2b^2p + a^2)$$

だから p は 2 の正の約数である。 $p = 1$ は整数根 $x = -1$ となり (2) に反するので $p = 2$ 、すなわち $x = -1/2$ である。

あとは

$$a^2 - 4b^2 + 3 = 0$$

を因数分解して

$$(2b - a)(2b + a) = 3$$

とし、4 組の整数因数対を調べる。よって

$$(a, b) = (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$$

を得る。

【総評】 合同式と有理数の整除性を組み合わせる問題である。目安時間は 18~22 分。(2) は整数根の候補を -1 まで絞り、合同式で排除する。(3) は解法 1 の候補列挙でも、解法 2 の既約分数からの整除でも $x = -1/2$ だけが残る。最後の $(2b - a)(2b + a) = 3$ では正負を含む 4 因数対を全て書き、得た (a, b) が 3 の倍数でないことと十分性を確認する。

【第 5 問】

α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

▶ 解法 1

【方針】

まず $\alpha = 0$ を分ける。 $\alpha \neq 0$ では両辺の絶対値を取り、 $A = |\alpha|$ 、 $r = |z|$ の二次方程式を解く。得られた半径を元の複素数方程式へ戻して z の偏角まで決める。

【解答】

$\alpha = 0$ のとき、方程式は

$$i\bar{z} = 0$$

となるので $z = 0$ である。

以下、 $\alpha \neq 0$ とし、

$$A = |\alpha|, \quad r = |z|$$

と置く。両辺の絶対値を取ると

$$A(r^2 + 2) = (2A^2 + 1)r$$

である。よって

$$Ar^2 - (2A^2 + 1)r + 2A = 0$$

となり、

$$(r - 2A)\left(r - \frac{1}{A}\right) = 0$$

を得る。

一方、元の式から

$$\bar{z} = \frac{i\alpha(r^2 + 2)}{2A^2 + 1}$$

なので

$$z = -\frac{i\bar{\alpha}(r^2 + 2)}{2A^2 + 1}$$

である。 $r = 2A$ のとき係数は 2 となり

$$z = -2i\bar{\alpha}$$

を得る。 $r = 1/A$ のとき係数は $1/A^2$ となり

$$z = -\frac{i\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$$

を得る。

したがって

$$\begin{cases} z = 0, & \alpha = 0, \\ z = -2i\bar{\alpha}, \quad z = -\frac{i\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}, & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

ただし $|\alpha|^2 = 1/2$ のとき、後の 2 つは同じ解である。

▶ 解法 2

【方針】

方程式の係数が正の実数であることから、 z の向きが $-i\bar{\alpha}$ と一致すると先に読む。 $z = -it\bar{\alpha}$ と置けば、未知量は正の実数 t だけになり、二次方程式が直接因数分解できる。

【解答】

$\alpha = 0$ の場合は解法 1 と同じく $z = 0$ である。以下、 $\alpha \neq 0$ とする。

元の式を z について解くと

$$z = -i\bar{\alpha} \frac{|z|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1}$$

である。右辺で分数部分は正の実数だから、ある $t > 0$ を用いて

$$z = -it\bar{\alpha}$$

と書ける。このとき

$$|z| = t|\alpha|$$

であり、元の式から

$$t = \frac{t^2|\alpha|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1}$$

を得る。整理すると

$$|\alpha|^2 t^2 - (2|\alpha|^2 + 1)t + 2 = 0$$

であり、

$$(t - 2)(|\alpha|^2 t - 1) = 0$$

と因数分解できる。

したがって

$$t = 2$$

または

$$t = \frac{1}{|\alpha|^2}$$

である。よって

$$z = -2i\bar{\alpha}$$

または

$$z = -\frac{i\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$$

となる。 $|\alpha|^2 = 1/2$ のときは t の 2 候補が一致する。

【総評】 絶対値を含む複素数方程式を、長さと向きに分ける問題である。目安時間は 18～22 分。 $\alpha = 0$ を最初に分け、 $\alpha \neq 0$ では絶対値の候補だけで終わらず元の式へ戻して z 自体を決める。解法 1 は半径 $r = |z|$ を先に求め、解法 2 は方向を先に固定して実数倍率 t を求める。2 解が $|\alpha|^2 = 1/2$ で一致することも解の個数に関わる。