

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 2019 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

曲線 $y = 3e^{-2x}$ 上を動く点 $P(t, 3e^{-2t})$ がある。ただし、 $t > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 $y = 3e^{-2x}$ と (1) で求めた接線、および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ。
- (3) (1) で求めた接線と x 軸、および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 S_2 が最大となる t 、およびそのときの S_2 の値を求めよ。
- (4) (2) と (3) で定義した S_1 , S_2 に対し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_1 + S_2)$ を求めよ。

第 2 問

赤りんごが a 個，青りんごが b 個入っている袋と，赤りんごが c 個，青りんごが d 個入っているかごがある。袋からりんごを 1 個取り出し，取り出したりんごを袋に戻した上で，そのりんごと同じ色のりんごをかごから袋に 1 個移動させる試行を何回か繰り返す。以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 3$ とする。2 回目の試行において，袋から取り出したりんごが赤りんごである確率を求めよ。
- (2) $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 3$ とする。2 回目の試行において，袋から取り出したりんごが赤りんごであったとき，1 回目の試行で袋から取り出したりんごが青りんごである確率を求めよ。
- (3) $a > 0$, $b > 0$, $c = 2$, $d = 3$ とする。何回目かの試行後に，かごに赤りんごと青りんごが 1 個ずつ残る確率を a , b を用いて表せ。
- (4) $a = 1$, $b = 1$, $c > 1$, $d > 1$ とする。何回目かの試行後に，かごに赤りんごと青りんごが 1 個ずつ残る確率を c , d を用いて表せ。

第 3 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 平面上の 2 点 P, Q の座標をそれぞれ $(a, b), (c, d)$ とし, O を原点とする。また, 複素数 α, β を $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ と定める。このとき, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は $\frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2}$ に等しいことを示せ。ただし, i は虚数単位, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は, それぞれ, α, β の共役な複素数である。

- (2) 原点 O を中心とする半径 1 の円を単位円という。単位円に内接する正 n 角形 ($n \geq 3$) の頂点を $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ とする。このとき, 単位円上の点 A に対して,

$$S_p = (\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OA})^p + (\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OA})^p + \dots + (\overrightarrow{OP_{n-1}} \cdot \overrightarrow{OA})^p$$

とする。ただし, p は $0 < p < n$ を満たす整数とする。

- (a) $S_1 = 0$ が成り立つことを示せ。
 (b) $S_2 = \frac{n}{2}$ が成り立つことを示せ。
 (c) S_p の値は点 A によらないことを示せ。

第 4 問

a を自然数とする。

(1) すべての自然数 n について、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+a-1) = \frac{1}{a+1} n(n+1) \cdots (n+a)$$

(2) $a \geq 2$ のとき、次の等式が、すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ。

$$\frac{b}{n(n+1) \cdots (n+a-2)} + \frac{c}{(n+1)(n+2) \cdots (n+a-1)} = \frac{a-1}{n(n+1) \cdots (n+a-1)}$$

(3) 級数の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+a-1)}$$

について、収束するならばその極限値を求め、発散するならばこれを証明せよ。

第 5 問

c を正の実数として、点 $(-1, 1, c)$ を通りベクトル $(7, 4, 2)$ に平行な直線を考える。

- (1) この直線上に中心をもち、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面すべてに接する球が存在するような c の値が二つあることを示せ。さらに、それぞれの c について、このような球が一つずつあることを示せ。
- (2) (1) で求めた二つの球の中心を通る直線を l とし、直線 l に垂直で原点を通る平面を α とする。直線 l と平面 α を、それぞれ式で表せ。
- (3) (1) で求めた二つの球のうち、半径の大きな方の球を S 、もう一方の球を S' とする。球 S は平面 α と交わらないことを示せ。
- (4) 球 S を、その中心が直線 l 上を動くように平面 α に向かって移動させる。球 S が平面 α に初めて接するまでの中心の移動距離を求めよ。
- (5) (4) の移動前の球 S と球 S' が内接する円錐の頂点を P とし、移動後の球 S と球 S' が内接する円錐の頂点を Q とするとき、 P と Q の距離を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)