

九州大学 2019 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $y = 3e^{-2x}$ 上を動く点 $P(t, 3e^{-2t})$ がある。ただし、 $t > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 $y = 3e^{-2x}$ と (1) で求めた接線、および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ。
- (3) (1) で求めた接線と x 軸、および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 S_2 が最大となる t 、およびそのときの S_2 の値を求めよ。
- (4) (2) と (3) で定義した S_1, S_2 に対し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_1 + S_2)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

指数関数の接線をまず正確に求める。 $y = 3e^{-2x}$ は下に凸なので、接線は曲線の下側にあり、 S_1 は $x = 0$ から接点 $x = t$ までの「曲線 - 接線」の積分で表せる。 S_2 は接線と両軸でできる三角形なので、 x 切片と y 切片から面積を出す。最大値は $S_2(t)$ の微分で判定し、最後の極限では多項式に e^{-2t} が掛かった項が 0 に近づくことを使う。

【解答】

(1) 曲線を $y = 3e^{-2x}$ とおくと $y' = -6e^{-2x}$ である。したがって点 $P(t, 3e^{-2t})$ における接線の傾きは $-6e^{-2t}$ であり、接線の方程式は $y - 3e^{-2t} = -6e^{-2t}(x - t)$ である。整理して $y = -6e^{-2t}x + 3e^{-2t}(1 + 2t)$ を得る。

(2) $y = 3e^{-2x}$ は $y'' = 12e^{-2x} > 0$ を満たすので下に凸であり、曲線は接線より上にある。よって、曲線、接線、 y 軸で囲まれた面積は

$$S_1 = \int_0^t \{3e^{-2x} - [-6e^{-2t}x + 3e^{-2t}(1 + 2t)]\} dx$$

である。すなわち

$$S_1 = \int_0^t \{3e^{-2x} + 6e^{-2t}x - 3e^{-2t}(1 + 2t)\} dx$$

である。

各項を積分すると

$$\int_0^t 3e^{-2x} dx = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}),$$

$$\int_0^t 6e^{-2t}x dx = 3t^2e^{-2t},$$

$$\int_0^t 3e^{-2t}(1 + 2t) dx = 3t(1 + 2t)e^{-2t}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}) + 3t^2e^{-2t} - 3t(1 + 2t)e^{-2t} \\ &= \frac{3}{2}\{1 - (2t^2 + 2t + 1)e^{-2t}\} \end{aligned}$$

である。

(3) 接線の y 切片は $3e^{-2t}(1 + 2t)$ である。また、接線の方程式で $y = 0$ とすると $0 = -6e^{-2t}x + 3e^{-2t}(1 + 2t)$ より、 x 切片は $\frac{1 + 2t}{2}$ である。したがって

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3e^{-2t}(1 + 2t) \cdot \frac{1 + 2t}{2} = \frac{3}{4}e^{-2t}(1 + 2t)^2$$

である。

これを微分すると

$$\begin{aligned} S_2' &= \frac{3}{4}e^{-2t}\{4(1+2t) - 2(1+2t)^2\} \\ &= \frac{3}{2}e^{-2t}(1+2t)(1-2t) \end{aligned}$$

となる。 $t > 0$ で $e^{-2t} > 0$ 、 $1+2t > 0$ だから、 S_2' の符号は $1-2t$ の符号で決まる。よって S_2 は $t = \frac{1}{2}$ で最大となる。そのとき $S_2 = \frac{3}{4}e^{-1} \cdot 4 = \frac{3}{e}$ である。

(4) (2)、(3) より $S_1 + S_2 = \frac{3}{2}\{1 - (2t^2 + 2t + 1)e^{-2t}\} + \frac{3}{4}e^{-2t}(1+2t)^2$ である。 $t \rightarrow \infty$ のとき、 t^2e^{-2t} 、 te^{-2t} 、 e^{-2t} はいずれも 0 に近づく。したがって指数関数を含む項はすべて 0 に近づき、 $\lim_{t \rightarrow \infty}(S_1 + S_2) = \frac{3}{2}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

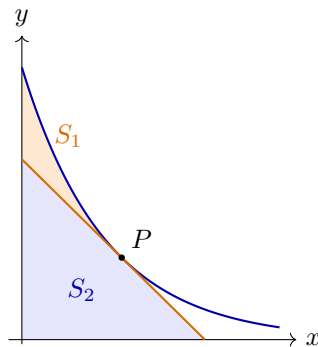
接線の切片から三角形面積を求め、 $u = 1 + 2t$ と置いて最大化する。最後は $S_1 + S_2$ を先に整理すると高次の項が相殺することを利用する。

【解答】

(1) 接点での微分係数は $-6e^{-2t}$ だから、接線は

$$y = 3e^{-2t}\{1 + 2t - 2x\}$$

である。



(2) 曲線は下に凸なので、曲線と接線の差を積分して

$$S_1 = \int_0^t [3e^{-2x} - 3e^{-2t}\{1 + 2t - 2x\}] dx = \frac{3}{2}\{1 - (2t^2 + 2t + 1)e^{-2t}\}$$

を得る。

(3) 接線の x 切片と y 切片は

$$\frac{1+2t}{2}, \quad 3e^{-2t}(1+2t)$$

だから

$$S_2 = \frac{3}{4}e^{-2t}(1+2t)^2$$

である。 $u = 1 + 2t > 1$ とおけば

$$S_2 = \frac{3e}{4}u^2e^{-u}$$

であり、

$$\frac{d}{du}(u^2e^{-u}) = u(2-u)e^{-u}$$

より $u = 2$ 、すなわち $t = 1/2$ で最大となる。最大値は $3/e$ である。

(4) 2つの面積を足すと高次項が相殺して

$$S_1 + S_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}e^{-2t}$$

となる。したがって

$$\lim_{t \rightarrow \infty}(S_1 + S_2) = \frac{3}{2}$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 24 分。接線の式、面積積分、切片による三角形面積が順に問われる標準的な微積分問題である。 S_1 では曲線が接線の上側にあることを $y'' > 0$ で確認してから積分すると符号ミスを避けられる。 S_2 の最大値では、 $(1+2t)^2 e^{-2t}$ の微分で $(1+2t)$ をくくり出すと符号判定が明確になる。最後の極限は、計算結果を展開せず「多項式 $\times$ 指数減衰」の項だけを見ればよい。

【第 2 問】

赤りんごが a 個、青りんごが b 個入っている袋と、赤りんごが c 個、青りんごが d 個入っているかごがある。袋からりんごを 1 個取り出し、取り出したりんごを袋に戻した上で、そのりんごと同じ色のりんごをかごから袋に 1 個移動させる試行を何回か繰り返す。以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 2, b = 3, c = 2, d = 3$ とする。2 回目の試行において、袋から取り出したりんごが赤りんごである確率を求めよ。
- (2) $a = 2, b = 3, c = 2, d = 3$ とする。2 回目の試行において、袋から取り出したりんごが赤りんごであったとき、1 回目の試行で袋から取り出したりんごが青りんごである確率を求めよ。
- (3) $a > 0, b > 0, c = 2, d = 3$ とする。何回目かの試行後に、かごに赤りんごと青りんごが 1 個ずつ残る確率を a, b を用いて表せ。
- (4) $a = 1, b = 1, c > 1, d > 1$ とする。何回目かの試行後に、かごに赤りんごと青りんごが 1 個ずつ残る確率を c, d を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

前半は 1 回目の結果で 2 回目の袋の中身が変わるので、赤を引いた場合と青を引いた場合に分けて全確率と条件付き確率を計算する。後半では、かごに赤 1 個・青 1 個が残るために必要な移動回数が決まっていることに注目する。(3) では最初の 3 回で赤 1 回・青 2 回を選ばばよく、どの順序でも分子の積が同じになる。(4) では赤を $c-1$ 回、青を $d-1$ 回選ぶ順序を数え、各順序の確率が同じ積になることを使う。

【解答】

(1) はじめ袋には赤 2 個、青 3 個が入っている。

1 回目に赤を取り出す確率は $\frac{2}{5}$ である。このとき、赤りんご 1 個がかごから袋に移るので、2 回目の直前の袋の中身は赤 3 個、青 3 個である。したがって、この場合に 2 回目も赤である確率は $\frac{3}{6}$ である。

1 回目に青を取り出す確率は $\frac{3}{5}$ である。このとき、2 回目の直前の袋の中身は赤 2 個、青 4 個である。したがって、この場合に 2 回目も赤である確率は $\frac{2}{6}$ である。

よって求める確率は

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

である。

(2) 「1 回目青、2 回目赤」である確率は $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$ である。(1) より「2 回目赤」である確率は $\frac{2}{5}$ であるから、求める条件付き確率は $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$ である。

(3) かごは最初、赤 2 個、青 3 個を含む。かごに赤 1 個、青 1 個が残るためには、かごから袋へ赤を 1 回、青を 2 回移せばよい。したがって、最初の 3 回の試行で赤が 1 回、青が 2 回取り出される確率を求めればよい。

例えば順序が赤、青、青である確率は $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+1} \cdot \frac{b+1}{a+b+2}$ である。順序が青、赤、青や青、青、赤でも、分子には同じく $a, b, b+1$ が 1 回ずつ現れ、分母は $(a+b)(a+b+1)(a+b+2)$ で同じである。赤 1 回、青 2 回の順序は 3 通りあるから、求める確率は $\frac{3ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$ である。

(4) 最初、袋には赤 1 個、青 1 個が入っている。かごに赤 1 個、青 1 個が残るには、赤を $c-1$ 回、青を $d-1$ 回、かごから袋に移せばよい。したがって試行回数は $(c-1) + (d-1) = c+d-2$ 回である。

この $c+d-2$ 回のうち、赤を選ぶ位置を決める方法は ${}_{c+d-2}C_{c-1}$ 通りである。1 つの順序を固定すると、赤が選ばれるたびに袋の赤の個数は $1, 2, \dots, c-1$ と現れ、青が選ばれるたびに袋の青の個数は $1, 2, \dots, d-1$ と現れる。一方、各回の袋全体の個数は $2, 3, \dots, c+d-1$ である。したがって固定した 1 つの順序の確率は $\frac{(c-1)!(d-1)!}{(c+d-1)!}$ である。

よって求める確率は

$${}_{c+d-2}C_{c-1} \frac{(c-1)!(d-1)!}{(c+d-1)!} = \frac{(c+d-2)!}{(c-1)!(d-1)!} \frac{(c-1)!(d-1)!}{(c+d-1)!} = \frac{1}{c+d-1}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

赤を r 回、青を s 回選ぶ固定順序の確率が順序によらないことを一般式にする。その式を前半の 2 段階と後半の必要回数へ一貫して適用する。

【解答】

赤を r 回、青を s 回選ぶ順序を 1 つ固定する。各回の分子を同色ごとにまとめると、その順序の確率は

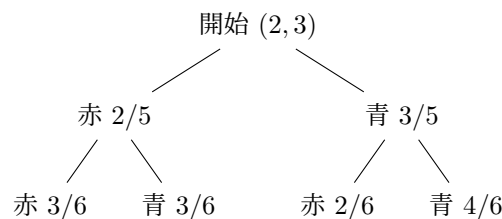
$$\frac{a(a+1)\cdots(a+r-1)b(b+1)\cdots(b+s-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+r+s-1)}$$

であり、並ぶ順序にはよらない。

(1) 最初が赤、青の 2 場合に分けると

$$\Pr(2 \text{ 回目が赤}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{5}$$

である。



(2) $\Pr(1 \text{ 回目が青かつ } 2 \text{ 回目が赤}) = (3/5)(2/6) = 1/5$ だから、条件付き確率は

$$\frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}$$

である。

(3) かごを赤 1 個、青 1 個にするには、最初の 3 回で赤を 1 回、青を 2 回選ぶ。順序は 3 通りなので、一般式から

$$3 \cdot \frac{ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

である。

(4) 今度は初期値 $a = b = 1$ とし、赤を $c-1$ 回、青を $d-1$ 回選ぶ。全 $c+d-2$ 回における順序数は ${}_{c+d-2}C_{c-1}$ である。よって

$$\begin{aligned} {}_{c+d-2}C_{c-1} \frac{(c-1)!(d-1)!}{(c+d-1)!} \\ = \frac{1}{c+d-1} \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 28 分。袋に戻した後、同じ色をかごから袋へ移すため、袋の中身は毎回 1 個ずつ増える。前半は全確率と条件付き確率の基本だが、1 回目が赤の場合と青の場合で 2 回目の分母がどちらも 6 になることを丁寧に追う必要がある。後半は、目標のかごの残数から必要な赤・青の移動回数を先に決めるのが核心である。固定した順序では分子の積が順序によらないため、最後は順序数だけを掛ければよい。

【第 3 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 平面上の 2 点 P, Q の座標をそれぞれ $(a, b), (c, d)$ とし, O を原点とする。また, 複素数 α, β を $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ と定める。このとき, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は $\frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2}$ に等しいことを示せ。ただし, i は虚数単位, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は, それぞれ, α, β の共役な複素数である。
- (2) 原点 O を中心とする半径 1 の円を単位円という。単位円に内接する正 n 角形 ($n \geq 3$) の頂点を $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ とする。このとき, 単位円上の点 A に対して,

$$S_p = (\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OA})^p + (\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OA})^p + \dots + (\overrightarrow{OP_{n-1}} \cdot \overrightarrow{OA})^p$$

とする。ただし, p は $0 < p < n$ を満たす整数とする。

(a) $S_1 = 0$ が成り立つことを示せ。

(b) $S_2 = \frac{n}{2}$ が成り立つことを示せ。

(c) S_p の値は点 A によらないことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) では複素数の積 $\alpha\bar{\beta}$ の実部が内積になることを直接展開して示す。(2) では正 n 角形の頂点を単位複素数 ω^k で表し, 単位円上の点 A を γ と表す。内積は $(\omega^k\bar{\gamma} + \omega^{-k}\gamma)/2$ になるので, S_1, S_2 は n 乗根の和で消える。一般の S_p も二項展開し, $0 < p < n$ のため非定数の回転成分がすべて消えることを示す。

【解答】

(1) $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ であるから $\bar{\beta} = c - di$ である。よって

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\beta} &= (a + bi)(c - di) \\ &= ac + bd + (bc - ad)i\end{aligned}$$

である。同様に $\bar{\alpha}\beta = ac + bd - (bc - ad)i$ である。したがって $\frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2} = ac + bd$ である。一方, $\overrightarrow{OP} = (a, b), \overrightarrow{OQ} = (c, d)$ なので $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = ac + bd$ である。よって主張が示された。

(2) $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とおく。正 n 角形の頂点を表す複素数は, 順に $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ とおける。また, 単位円上の点 A を表す複素数を γ とする。このとき $|\gamma| = 1$ である。

(1) より, P_k に対応する複素数が ω^k であることを用いると

$$\overrightarrow{OP_k} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\omega^k\bar{\gamma} + \omega^{-k}\gamma}{2}$$

である。

(a)

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k\bar{\gamma} + \omega^{-k}\gamma)$$

である。ここで $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0, \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k} = 0$ だから $S_1 = 0$ である。

(b)

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k\bar{\gamma} + \omega^{-k}\gamma)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{2k}\bar{\gamma}^2 + 2|\gamma|^2 + \omega^{-2k}\gamma^2)\end{aligned}$$

である。 $n \geq 3$ なので $\omega^2 \neq 1$ であり, $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2k} = 0, \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-2k} = 0$ が成り立つ。また $|\gamma| = 1$ である。したがって $S_2 = \frac{1}{4} \cdot 2n = \frac{n}{2}$ である。

(c)

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\omega^k \bar{\gamma} + \omega^{-k} \gamma}{2} \right)^p$$

である。二項展開すると

$$S_p = \frac{1}{2^p} \sum_{j=0}^p {}_p C_j \bar{\gamma}^j \gamma^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(2j-p)}$$

となる。

ここで $0 < p < n$ だから、整数 $2j-p$ は $-(n-1) \leq 2j-p \leq n-1$ の範囲にある。したがって $2j-p \neq 0$ のとき、 $2j-p$ は n の倍数ではなく、 $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(2j-p)} = 0$ である。残る可能性があるのは $2j-p=0$ の項だけである。

よって p が奇数なら残る項はなく、 $S_p = 0$ である。 p が偶数なら $j = \frac{p}{2}$ の項だけが残る、 $|\gamma| = 1$ より $S_p = \frac{n}{2^p} {}_p C_{p/2}$ である。いずれの場合も S_p は γ 、すなわち点 A によらない。

▶ 解法 2

【方針】

頂点と点 A を偏角で表し、内積を余弦へ直す。正多角形上の等間隔な角に対する三角和を使い、 $\cos^p x$ の複素指数展開で一般の p を処理する。

【解答】

(1) $\alpha = a + ib$ 、 $\beta = c + id$ とすると

$$\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta = 2(ac + bd)$$

である。したがって

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = ac + bd = \frac{\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta}{2}$$

となる。

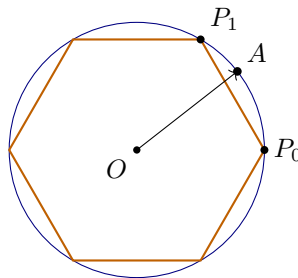
(2) 正 n 角形の頂点の偏角を

$$\phi + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

とし、点 A の偏角を θ とする。 $\delta = \theta - \phi$ とおけば

$$\overrightarrow{OP_k} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos \left(\delta - \frac{2k\pi}{n} \right)$$

である。



正 n 角形の配置の模式図

(a) 等比数列の和から

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k\pi i/n} = 0$$

である。その実部を取れば $S_1 = 0$ である。

(b) $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ より

$$S_2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(2\delta - \frac{4k\pi}{n} \right)$$

である。 $n \geq 3$ では後半の和が 0 になるので

$$S_2 = \frac{n}{2}$$

である。

(c) 複素指数を用いると

$$\cos^p x = \frac{1}{2^p} \sum_{j=0}^p {}^p C_j e^{i(p-2j)x}$$

である。これを各頂点の角へ代入して k について和を取る。 $0 < p < n$ なので、 $p - 2j \neq 0$ なら $p - 2j$ は n の倍数ではなく、対応する等比数列の和は 0 である。

したがって p が奇数なら $S_p = 0$ である。 p が偶数なら $j = p/2$ の定数項だけが残る

$$S_p = \frac{n}{2^p} {}^p C_{p/2}$$

となる。いずれも θ 、すなわち点 A によらない。

【総評】 難度 7、目安時間 32 分。複素数表示と内積を結びつける問題で、(1) の実部計算を (2) でそのまま使う設計になっている。 S_1, S_2 だけなら三角関数の和でも処理できるが、(c) まで一貫して示すには単位根 ω の和を使うのが最も整理しやすい。 $0 < p < n$ という条件は、 $2j - p$ が 0 以外で n の倍数にならないことを保証するために使われる。ここを明記すると証明の抜けがなくなる。

【第 4 問】

a を自然数とする。

(1) すべての自然数 n について、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+a-1) = \frac{1}{a+1} n(n+1) \cdots (n+a)$$

(2) $a \geq 2$ のとき、次の等式が、すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ。

$$\frac{b}{n(n+1) \cdots (n+a-2)} + \frac{c}{(n+1)(n+2) \cdots (n+a-1)} = \frac{a-1}{n(n+1) \cdots (n+a-1)}$$

(3) 級数の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+a-1)}$$

について、収束するならばその極限値を求め、発散するならばこれを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は連続する積の隣り合う差を作る。 $k(k+1) \cdots (k+a)$ と $(k-1)k \cdots (k+a-1)$ の差が $(a+1)k(k+1) \cdots (k+a-1)$ になるので、和を取ると望遠鏡型に消える。(2) は両辺に共通分母を掛けて、 n の恒等式として係数比較する。(3) は $a=1$ だけ調和級数として分け、 $a \geq 2$ では (2) の部分分数分解により有限和を望遠鏡型にする。

【解答】

(1) 各 k について $k(k+1) \cdots (k+a) - (k-1)k \cdots (k+a-1)$ を考える。共通因数 $k(k+1) \cdots (k+a-1)$ でくくると

$$\begin{aligned} & k(k+1) \cdots (k+a) - (k-1)k \cdots (k+a-1) \\ &= \{(k+a) - (k-1)\} k(k+1) \cdots (k+a-1) \\ &= (a+1)k(k+1) \cdots (k+a-1) \end{aligned}$$

である。

したがって

$$k(k+1) \cdots (k+a-1) = \frac{1}{a+1} \{k(k+1) \cdots (k+a) - (k-1)k \cdots (k+a-1)\}$$

である。これを $k = 1, 2, \dots, n$ について足すと、中間の項が消える。 $k = 1$ の引かれる項は 0 を因数にもつので 0 であり、最後に $n(n+1)\cdots(n+a)$ だけが残る。よって $\sum_{k=1}^n k(k+1)\cdots(k+a-1) = \frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$ である。

(2) 両辺に $n(n+1)\cdots(n+a-1)$ を掛ける。すると $b(n+a-1) + cn = a-1$ を得る。これはすべての自然数 n について成り立つ恒等式であるから、 n の係数と定数項を比較して $b+c=0$, $b(a-1) = a-1$ となる。 $a \geq 2$ より $a-1 \neq 0$ だから $b=1$, $c=-1$ である。

(3) まず $a=1$ のとき、級数は $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ である。これは調和級数である。実際、 $2^{m-1} < k \leq 2^m$ の範囲にある項をまとめると、その部分には 2^{m-1} 個の項があり、各項は $\frac{1}{2^m}$ 以上であるから、各まとまりの和は $\frac{1}{2}$ 以上である。したがって部分和は限りなく大きくなり、発散する。

次に $a \geq 2$ とする。(2) より

$$\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)} = \frac{1}{a-1} \left\{ \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+a-1)} \right\}$$

である。これを $k = 1, 2, \dots, n$ について足すと望遠鏡型に消えて

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)} = \frac{1}{a-1} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (a-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)} \right\}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ とすると、右辺第 2 項は 0 に近づく。したがって $a \geq 2$ のとき級数は収束し、その極限值は $\frac{1}{(a-1)(a-1)!}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

連続積を組合せ数に直し、パスカルの関係から得られるホッケースティック型の和で (1) を証明する。(2)(3) では共通分母と望遠鏡和を用い、 $a=1$ だけを分ける。

【解答】

(1) 連続積は

$$k(k+1)\cdots(k+a-1) = a! {}_{k+a-1}C_a$$

と書ける。パスカルの関係を繰り返して得られる恒等式

$$\sum_{r=a}^{n+a-1} r C_a = {}_{n+a}C_{a+1}$$

を使うと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)\cdots(k+a-1) &= a! {}_{n+a}C_{a+1} \\ &= \frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a) \end{aligned}$$

となる。

(2) 両辺へ $n(n+1)\cdots(n+a-1)$ を掛けると

$$b(n+a-1) + cn = a-1$$

である。すべての n について成り立つので

$$b+c=0, \quad b(a-1) = a-1$$

である。 $a \geq 2$ より

$$b=1, \quad c=-1$$

を得る。

(3) $a=1$ のときは調和級数である。 $2^{m-1} < k \leq 2^m$ の各まとまりの和が $1/2$ 以上だから、部分和は発散する。

$a \geq 2$ のときは (2) から

$$\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+a-1)} = \frac{1}{a-1} \left\{ \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+a-2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+a-1)} \right\}$$

である。したがって

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+a-1)} = \frac{1}{a-1} \left\{ \frac{1}{(a-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+a-1)} \right\}$$

となる。極限値は

$$\frac{1}{(a-1)(a-1)!}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 26 分。積の形を見たら、前後に 1 因子ずらした差を作るのが基本方針である。(1) の望遠鏡和がそのまま (3) の部分分数分解にもつながっているため、途中の差の作り方を丁寧に書くと全体の流れが見えやすい。(2) では定数 b, c と自然数 n を混同せず、共通分母を掛けた後に n の恒等式として処理する。 $a = 1$ だけは (2) が使えないので、調和級数として必ず別扱いする必要がある。

【第 5 問】

c を正の実数として、点 $(-1, 1, c)$ を通りベクトル $(7, 4, 2)$ に平行な直線を考える。

- (1) この直線上に中心をもち、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面すべてに接する球が存在するような c の値が二つあることを示せ。さらに、それぞれの c について、このような球が一つずつあることを示せ。
- (2) (1) で求めた二つの球の中心を通る直線を l とし、直線 l に垂直で原点を通る平面を α とする。直線 l と平面 α を、それぞれ式で表せ。
- (3) (1) で求めた二つの球のうち、半径の大きな方の球を S 、もう一方の球を S' とする。球 S は平面 α と交わらないことを示せ。
- (4) 球 S を、その中心が直線 l 上を動くように平面 α に向かって移動させる。球 S が平面 α に初めて接するまでの中心の移動距離を求めよ。
- (5) (4) の移動前の球 S と球 S' が内接する円錐の頂点を P とし、移動後の球 S と球 S' が内接する円錐の頂点を Q とするとき、 P と Q の距離を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

球が 3 つの座標平面すべてに接するための条件は、中心の 3 座標の絶対値がすべて半径に等しいことである。直線上の中心を $(-1+7t, 1+4t, c+2t)$ と置き、まず第 1・第 2 座標の符号の組合せから可能な t と半径を絞る。得られた 2 つの中心から直線 l と垂直平面 α を求める。後半は、中心から平面までの距離と半径の比較、さらに同一直線上の 2 球に外接する円錐の相似比を使って、中心移動距離と頂点間距離を計算する。

【解答】

(1) 与えられた直線上の点は、実数 t を用いて $(-1+7t, 1+4t, c+2t)$ と表される。この点を中心とする球が xy 平面、 yz 平面、 zx 平面のすべてに接するには、中心の 3 座標の絶対値がすべて等しければよい。その共通値を半径 r とする。

まず第 1 座標と第 2 座標について考える。可能な符号を調べると、半径 $r > 0$ を与えるのは次の 2 通りだけである。
 $-1+7t = -r, \quad 1+4t = r$ から $t = 0, \quad r = 1$ を得る。また $-1+7t = r, \quad 1+4t = r$ から $t = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{11}{3}$ を得る。残りの符号の組合せでは r が負になり、球の半径として不適である。 $t = 0, r = 1$ の場合、中心は $(-1, 1, c)$ であり、第 3 座標も絶対値 1 でなければならない。 $c > 0$ より $c = 1$ である。このとき中心は $C_1 = (-1, 1, 1)$ で、半径は 1 である。 $t = \frac{2}{3}, r = \frac{11}{3}$ の場合、第 1・第 2 座標はともに $\frac{11}{3}$ であり、第 3 座標は $c + \frac{4}{3}$ である。 $c > 0$ かつ絶対値が $\frac{11}{3}$ であることから $c + \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ となり $c = \frac{7}{3}$ である。このとき中心は $C_2 = \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ で、半径は $\frac{11}{3}$ である。

したがって条件を満たす c は $1, \frac{7}{3}$ の 2 つであり、それぞれについて対応する球は 1 つずつである。

(2) 2 つの中心は

$$C_1 = (-1, 1, 1), \quad C_2 = \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

である。方向ベクトルは $C_2 - C_1 = \left(\frac{14}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ なので、直線 l の方向ベクトルは $(7, 4, 4)$ としてよい。よって $l: (x, y, z) = (-1, 1, 1) + s(7, 4, 4)$ である。

直線 l に垂直で原点を通る平面 α の法線ベクトルは $(7, 4, 4)$ である。したがって $\alpha: 7x + 4y + 4z = 0$ である。

(3) 半径の大きな球 S の中心は C_2 、半径は $\frac{11}{3}$ である。点 C_2 から平面 α までの距離は

$$\frac{\left|7 \cdot \frac{11}{3} + 4 \cdot \frac{11}{3} + 4 \cdot \frac{11}{3}\right|}{\sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{55}{9}$$

である。一方、半径は $\frac{11}{3} = \frac{33}{9}$ である。中心から平面までの距離が半径より大きいので、球 S は平面 α と交わらない。

(4) 直線 l は平面 α に垂直である。したがって、中心を l 上で α に向かって動かすと、中心から α までの距離は動かした距離だけ減少する。球 S が初めて α に接するとき、中心から α までの距離は半径 $\frac{11}{3}$ に等しい。よって中心の移動距離は $\frac{55}{9} - \frac{11}{3} = \frac{22}{9}$ である。

(5) 小さい球 S' の中心を C_1 、大きい球 S の移動前の中心を C_2 とする。2つの中心間距離は $|C_2 - C_1| = \frac{1}{3}\sqrt{14^2 + 8^2 + 8^2} = 6$ である。小さい球の半径は 1、大きい球の半径は $\frac{11}{3}$ である。

2つの球が内接する円錐の頂点は、2つの中心を結ぶ直線上にある。頂点が小さい球の中心から、大きい球と反対側に距離 x だけ離れているとすると、円錐の相似より $\frac{x}{x+6} = \frac{1}{11/3}$ である。これを解くと $x = \frac{6}{\frac{11}{3}-1} = \frac{9}{4}$ である。したがって、移動前の頂点 P は C_1 から大きい球と反対側に $\frac{9}{4}$ だけ離れた点である。

(4) で大きい球の中心は α に向かって $\frac{22}{9}$ だけ動く。この移動は C_2 から C_1 へ向かう向きであるから、移動後の大きい球の中心と C_1 の距離は $6 - \frac{22}{9} = \frac{32}{9}$ である。同様に、移動後の円錐の頂点 Q が C_1 から大きい球と反対側に距離 y だけ離れているとすると $\frac{y}{y+\frac{32}{9}} = \frac{1}{11/3}$ である。よって $y = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{11}{3}-1} = \frac{4}{3}$ である。

点 P, Q はどちらも C_1 から同じ向きの半直線上にあるので $PQ = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{11}{12}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

中心の第 1・第 2 座標の絶対値が等しい条件を 2 本の一次方程式に分け、候補を一意に絞る。後半は直線方向の 1 次元座標と、2 球に接する円錐の相似比だけで距離を処理する。

【解答】

(1) 中心を

$$X(t) = (-1 + 7t, 1 + 4t, c + 2t)$$

とする。3 座標平面すべてに接する条件は、3 座標の絶対値が等しいことである。まず

$$|-1 + 7t| = |1 + 4t|$$

を解くと

$$-1 + 7t = 1 + 4t \quad \text{または} \quad -1 + 7t = -1 - 4t$$

より $t = 2/3$ または $t = 0$ である。

$t = 0$ では第 1・第 2 座標の絶対値が 1 なので、 $c > 0$ より $c = 1$ 。中心と半径は

$$C_1 = (-1, 1, 1), \quad r_1 = 1$$

である。 $t = 2/3$ では第 1・第 2 座標が $11/3$ なので

$$c + \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

より $c = 7/3$ 。中心と半径は

$$C_2 = \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right), \quad r_2 = \frac{11}{3}$$

である。候補の t が 2 つに限られるため、各 c に対する球も一意である。

(2) $C_2 - C_1 = (2/3)(7, 4, 4)$ だから

$$l: (x, y, z) = (-1, 1, 1) + s(7, 4, 4)$$

である。また

$$\alpha: 7x + 4y + 4z = 0$$

である。

(3) $|(7, 4, 4)| = 9$ だから、 C_2 から α までの距離は

$$\frac{|(7, 4, 4) \cdot C_2|}{9} = \frac{55}{9}$$

である。これは $r_2 = 11/3$ より大きいので、球 S は α と交わらない。

(4) 中心は平面の法線方向に動くので、初めて接するまでの距離は

$$\frac{55}{9} - \frac{11}{3} = \frac{22}{9}$$

である。

(5) 中心間距離を D とする。円錐の頂点から小球中心までの距離を x とすれば、軸を含む断面の相似から

$$\frac{x}{x + D} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{11}$$

であり、

$$x = \frac{3}{8}D$$

となる。移動前は $D = |C_2 - C_1| = 6$ 、移動後は

$$D' = 6 - \frac{22}{9} = \frac{32}{9}$$

である。



したがって頂点の移動距離は

$$PQ = \frac{3}{8}(D - D') = \frac{3}{8} \cdot \frac{22}{9} = \frac{11}{12}$$

である。

【総評】 難度 8、目安時間 40 分。前半は「3 つの座標平面すべてに接する球」の中心条件を $|x| = |y| = |z|$ と翻訳できるかが勝負である。符号の場合分けは多く見えるが、第 1・第 2 座標だけで有効な 2 通りに絞れる。後半は座標計算よりも、中心がすべて直線 l 上に並ぶこと、 $l \perp \alpha$ であること、2 球に内接する円錐では半径比が頂点から中心までの距離比になることを使う構成力が問われる。距離 $55/9$ 、移動距離 $22/9$ 、中心間距離 $32/9$ の関係を整理して書くと失点しにくい。