

入 学 試 験 問 題

数 学



九 州 大 学 2021 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

三角形 ABC の辺 AB , BC , AC の長さをそれぞれ 5, 7, 6 とし, 点 P と点 Q はそれぞれ $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$ を満たす点とする。さらに, 点 A から線分 PQ に下ろした垂線と線分 PQ の交点を H , 線分 AH と線分 BC の交点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $BR : RC$ を求めよ。
- (2) $AR : RH$ を求めよ。
- (3) 三角形 RHC の面積を求めよ。

第 2 問

M を 2 以上の自然数, p を実数として, 次の条件によって定められる $3M$ 個の項からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3M}$ を考える。

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \frac{3n+p}{27M^3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots, 3M - 1$) とするとき, 数列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3M-1}$ の一般項 b_n を求めよ。
- (2) 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3M}$ の一般項 a_n を求めよ。さらに, $a_{3M} = 0$ を満たす p を p_M とするとき, p_M を M の式で表せ。
- (3) (2) で求めた p_M について, $p = p_M$ の場合における数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3M}$ の中で最小の項を c_M とする。 $a_n = c_M$ となるすべての n を M の式で表せ。さらに, $\lim_{M \rightarrow \infty} c_M$ を求めよ。

第 3 問

実数 a は $a > 1$ とする。曲線 $y = e^x$ と直線 $y = a - 1$, 直線 $y = a$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに一回転させて得られる立体の体積を $V(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $V(a)$ を求めよ。
- (2) $V(a)$ を最小とする a の値を求めよ。
- (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (V(a) - V(a - 1))$$

必要ならば, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を証明なしで用いてよい。

第 4 問

正四面体 ABCD の頂点 A, B, C, D 上の動点 P が、時刻 0 には頂点 B にいるとする。0 以上の整数 n に対して、時刻 $n+1$ の P の位置が、時刻 n の P の位置から以下のルールに従って決まるとする。

- 時刻 n に P が頂点 A にいる場合

時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ で頂点 A, B, C, D にいる。

- 時刻 n に P が頂点 B にいる場合

時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ で頂点 A, B, C にいる。

- 時刻 n に P が頂点 C にいる場合

時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ で頂点 A, C, D にいる。

- 時刻 n に P が頂点 D にいる場合

時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ で頂点 A, B, D にいる。

0 以上の整数 n に対して、時刻 n に P が頂点 A, B, C, D にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) n が 3 の倍数のときの $b_n - c_n$ と $c_n - d_n$ を求めよ。
- (3) n が 3 の倍数のときの b_n, c_n, d_n を求めよ。

第 5 問

$f(x)$ を次の条件を満たす 3 次の多項式とする。

(a) x^3 の係数は 1 である。

(b) $0, 1, -1$ ではない複素数 ω が存在して、すべての自然数 n について $f(\omega^n) = 0$ となる

以下の問いに答えよ。

(1) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ または $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であることを示せ。ただし、 i は虚数単位とする。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $g(x)$ を次の多項式とする。

$$g(x) = \sum_{n=0}^{2021} x^n = x^{2021} + x^{2020} + \cdots + 1$$

$g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)