

九州大学 2021 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

三角形 ABC の辺 AB , BC , AC の長さをそれぞれ 5, 7, 6 とし, 点 P と点 Q はそれぞれ $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$ を満たす点とする。さらに, 点 A から線分 PQ に下ろした垂線と線分 PQ の交点を H , 線分 AH と線分 BC の交点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $BR : RC$ を求めよ。
- (2) $AR : RH$ を求めよ。
- (3) 三角形 RHC の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (ベクトルの内積と内分比を用いる)

【方針】

座標を置いて距離比と面積を一貫して計算する。辺 BC を x 軸上に置き、余弦定理から A の座標を決める。条件 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$ から P, Q を求め、直線 PQ の傾きから垂線 AH を書く。 AH と BC の交点が R , AH と PQ の交点が H なので、座標から比と高さを読み取る。

【解答】

(1) 座標を $B = (0, 0)$, $C = (7, 0)$ とおく。 $AB = 5$, $AC = 6$ であるから、 $A = (u, v)$ とすると $u^2 + v^2 = 25$, $(u-7)^2 + v^2 = 36$ である。2 式を引くと $-14u + 49 = 11$ より $u = \frac{19}{7}$ である。さらに $v^2 = 25 - \left(\frac{19}{7}\right)^2 = \frac{864}{49}$ であり、 A を x 軸の上側に取って $A = \left(\frac{19}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$ とする。 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$ より $P = A + 2(B - A) = 2B - A = \left(-\frac{19}{7}, -\frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$ である。また $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$ より $Q = B + 2(C - B) = (14, 0)$ である。

直線 PQ の傾きは

$$\frac{0 + \frac{12\sqrt{6}}{7}}{14 + \frac{19}{7}} = \frac{12\sqrt{6}}{117} = \frac{4\sqrt{6}}{39}$$

である。したがって、これに垂直な直線 AH の傾きは $-\frac{39}{4\sqrt{6}}$ である。直線 AH は点 A を通るので $y - \frac{12\sqrt{6}}{7} = -\frac{39}{4\sqrt{6}}\left(x - \frac{19}{7}\right)$ である。

点 R はこの直線と BC 、すなわち x 軸との交点である。 $y = 0$ を代入すると $-\frac{12\sqrt{6}}{7} = -\frac{39}{4\sqrt{6}}\left(x - \frac{19}{7}\right)$ より $x - \frac{19}{7} = \frac{96}{91}$ となる。よって $R = \left(\frac{49}{13}, 0\right)$ である。したがって $BR = \frac{49}{13}$, $RC = 7 - \frac{49}{13} = \frac{42}{13}$ であり、 $BR : RC = 49 : 42 = 7 : 6$ である。

(2) 点 H は直線 AH と直線 PQ の交点である。計算しやすいように、直線 PQ を点 $Q(14, 0)$ と傾き $\frac{4\sqrt{6}}{39}$ を用いて $y = \frac{4\sqrt{6}}{39}(x - 14)$ と書く。これと直線 AH を連立すると $H = \left(\frac{337}{77}, -\frac{76\sqrt{6}}{77}\right)$ を得る。

まず A と R の距離は

$$\begin{aligned} AR^2 &= \left(\frac{19}{7} - \frac{49}{13}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{96}{91}\right)^2 + \frac{864}{49} = \frac{3168}{169} \text{ であるから } AR = \frac{12\sqrt{22}}{13} \text{ である。} \end{aligned}$$

次に

$$RH^2 = \left(\frac{337}{77} - \frac{49}{13}\right)^2 + \left(-\frac{76\sqrt{6}}{77}\right)^2 = \frac{5776 \cdot 22}{143^2}$$

であるから $RH = \frac{76\sqrt{22}}{143}$ である。よって $AR : RH = \frac{12\sqrt{22}}{13} : \frac{76\sqrt{22}}{143}$ であり、 $143 = 11 \cdot 13$ を用いて整理すると

$AR:RH = 33:19$ である。

(3) 三角形 RHC では、底辺を RC と見れば $RC = \frac{42}{13}$ である。また R, C は x 軸上にあるので、高さは点 H の y 座標の絶対値 $\frac{76\sqrt{6}}{77}$ である。したがって面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{42}{13} \cdot \frac{76\sqrt{6}}{77} = \frac{228\sqrt{6}}{143}$$

である。

▶ 解法 2 (座標を置いて垂足と交点を求める)

【方針】

$A = (0, 0), B = (5, 0)$ と置き、辺長から C の座標を決める。条件から P, Q を座標表示し、原点から直線 PQ への射影で H を求める。直線 AH と BC の交点を R として比と面積を計算する。

【解答】

(1)

$$A = (0, 0), \quad B = (5, 0)$$

と置く。 $AC = 6, BC = 7$ から

$$C = \left(\frac{6}{5}, \frac{12\sqrt{6}}{5}\right)$$

である。また $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$ より

$$P = (10, 0), \quad Q = \left(-\frac{13}{5}, \frac{24\sqrt{6}}{5}\right).$$

直線 PQ の方向ベクトルを

$$\mathbf{d} = Q - P = \left(-\frac{63}{5}, \frac{24\sqrt{6}}{5}\right)$$

とする。 $H = P + t\mathbf{d}$ とおき $AH \perp PQ$ を使うと

$$(P + t\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = 0, \quad t = \frac{14}{33}.$$

したがって

$$H = \left(\frac{256}{55}, \frac{112\sqrt{6}}{55}\right).$$

R は直線 AH 上にあるから $R = \lambda H$ とおく。さらに $R \in BC$ を連立すると

$$\lambda = \frac{33}{52}, \quad R = B + \frac{7}{13}(C - B).$$

よって

$$BR:RC = 7:6.$$

(2) $R = (33/52)H$ であり、 A, R, H はこの順に一直線上にある。したがって

$$AR:RH = \frac{33}{52} : \frac{19}{52}$$

より

$$AR:RH = 33:19.$$

(3) 座標から

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}.$$

また $RC/BC = 6/13$ だから

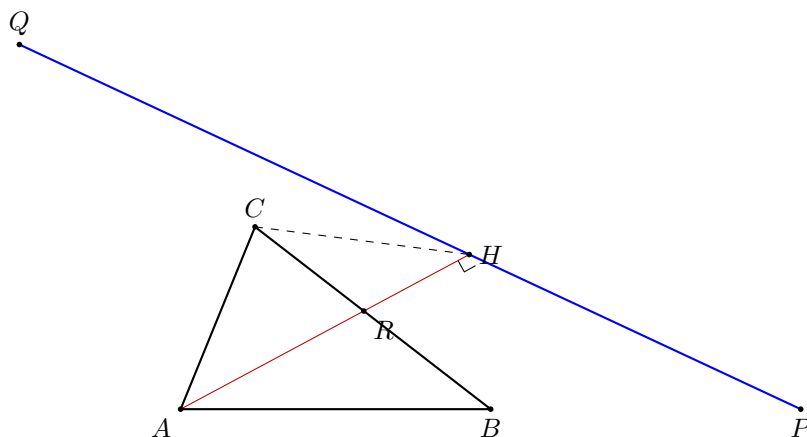
$$[ARC] = \frac{6}{13}[ABC].$$

三角形 ARC と RHC は底辺 RC を共有し、高さの比は

$$RH : RA = 19 : 33$$

である。よって

$$[RHC] = \frac{19}{33} \cdot \frac{6}{13} \cdot 6\sqrt{6} = \frac{228\sqrt{6}}{143}.$$



【総評】 座標設定で押し切る平面幾何問題。目安時間は 22 分。最初に $B = (0, 0), C = (7, 0)$ と置くと、 A の座標は余弦定理相当の 2 式からすぐ決まる。 P, Q は三角形の外側に出るため、符号を落とすと後続の比が崩れる。(1) は R の x 座標、(2) は H の座標、(3) は H の高さだけを使う、というように計算の目的を分けて整理すると見通しがよい。

【第 2 問】

M を 2 以上の自然数, p を実数として、次の条件によって定められる $3M$ 個の項からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3M}$ を考える。

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \frac{3n+p}{27M^3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots, 3M-1$) とするとき、数列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3M-1}$ の一般項 b_n を求めよ。
- (2) 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3M}$ の一般項 a_n を求めよ。さらに、 $a_{3M} = 0$ を満たす p を p_M とするとき、 p_M を M の式で表せ。
- (3) (2) で求めた p_M について、 $p = p_M$ の場合における数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3M}$ の中で最小の項を c_M とする。 $a_n = c_M$ となるすべての n を M の式で表せ。さらに、 $\lim_{M \rightarrow \infty} c_M$ を求めよ。

▶ 解法 1 (階差数列を 2 回加える)

【方針】

2 階差をそのまま扱わず、まず $b_n = a_{n+1} - a_n$ と置いて 1 階差の和に直す。(1) で b_n を求め、(2) ではさらに b_j を $j = 1$ から $n-1$ まで足して a_n を得る。 $a_{3M} = 0$ は積の因子 $3M+p$ だけが 0 になる条件である。(3) では $p = -3M$ のもとで負になる部分を確認し、最小値は $h(n) = (n-2)(n-1)(3M-n)$ の最大値に対応するので、差 $h(n+1) - h(n)$ の符号で整数の最大位置を決める。

【解答】

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。与えられた漸化式は $(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = \frac{3n+p}{27M^3}$ であるから $b_{n+1} - b_n = \frac{3n+p}{27M^3}$ である。また $b_1 = a_2 - a_1 = 0$ である。したがって $n \geq 1$ について $b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{3j+p}{27M^3}$ であり、 $b_n = \frac{1}{27M^3} \left\{ 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + p(n-1) \right\}$ となる。よって $b_n = \frac{(n-1)(3n+2p)}{54M^3}$ である。

(2) $a_1 = 0$ であり、 $b_j = a_{j+1} - a_j$ だから $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_j$ である。(1) の結果を用いると $a_n = \frac{1}{54M^3} \sum_{j=1}^{n-1} (j-1)(3j+2p)$

である。ここで $m = j - 1$ とおくと $(j - 1)(3j + 2p) = m(3m + 3 + 2p)$ であるから

$$\sum_{j=1}^{n-1} (j-1)(3j+2p) = 3 \sum_{m=0}^{n-2} m^2 + (3+2p) \sum_{m=0}^{n-2} m$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{2} + \frac{(3+2p)(n-2)(n-1)}{2} = (n-2)(n-1)(n+p) \text{ である。したがって } a_n = \frac{(n-2)(n-1)(n+p)}{54M^3}$$

である。

特に $a_{3M} = \frac{(3M-2)(3M-1)(3M+p)}{54M^3}$ である。 $M \geq 2$ なので $3M-2$ と $3M-1$ は 0 でない。よって $a_{3M} = 0$ となる条件は $3M+p=0$ であり、 $p_M = -3M$ である。

(3) $p = p_M = -3M$ のとき $a_n = \frac{(n-2)(n-1)(n-3M)}{54M^3}$ である。 $n = 1, 2, 3M$ では $a_n = 0$ であり、 $3 \leq n \leq 3M-1$ では $n-2 > 0$, $n-1 > 0$, $n-3M < 0$ なので $a_n < 0$ である。

したがって最小の項を求めるには $h(n) = (n-2)(n-1)(3M-n)$ の最大値を、整数 n の範囲で求めればよい。差を計算すると $h(n+1) - h(n) = (n-1)n(3M-n-1) - (n-2)(n-1)(3M-n) = (n-1)\{2(3M-n) - n\} = -3(n-1)(n-2M)$ である。

よって $n < 2M$ では $h(n+1) - h(n) > 0$ 、 $n > 2M$ では $h(n+1) - h(n) < 0$ である。また $n = 2M$ では差が 0 なので $h(2M) = h(2M+1)$ である。したがって $h(n)$ は $n = 2M$, $n = 2M+1$ で最大となる。ゆえに $a_n = c_M$ となるのは $n = 2M$, $n = 2M+1$ である。

最小値は $c_M = a_{2M} = \frac{(2M-2)(2M-1)(-M)}{54M^3} = -\frac{(M-1)(2M-1)}{27M^2}$ である。したがって

$$\lim_{M \rightarrow \infty} c_M = -\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(M-1)(2M-1)}{27M^2} = -\frac{2}{27}$$

である。

▶ 解法 2 (3 次式を直接検算して一意性を用いる)

【方針】

右辺が n の 1 次式なので、2 階差をとる数列 a_n は n の 3 次式になる。初期条件を含む候補を直接代入して一般項を確定し、 $a_{3M} = 0$ から p を決める。最小項は 1 階差の符号だけで判定する。

【解答】

(1) 候補

$$b_n = \frac{(n-1)(3n+2p)}{54M^3}$$

について直接計算すると

$$b_{n+1} - b_n = \frac{3n+p}{27M^3}, \quad b_1 = 0$$

を満たす。よって $b_n = a_{n+1} - a_n$ の一意性から

$$b_n = \frac{(n-1)(3n+2p)}{54M^3}.$$

(2) さらに

$$A_n = \frac{(n-2)(n-1)(n+p)}{54M^3}$$

とおくと

$$A_1 = A_2 = 0, \quad A_{n+1} - A_n = b_n.$$

したがって元の漸化式と初期条件を満たす数列は一意だから

$$a_n = \frac{(n-2)(n-1)(n+p)}{54M^3}.$$

条件 $a_{3M} = 0$ では $M \geq 2$ より $3M-2, 3M-1 \neq 0$ なので

$$3M+p=0, \quad p_M = -3M.$$

(3) $p = -3M$ のとき

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n-1)(n-2M)}{18M^3}.$$

したがって数列は $n < 2M$ で減少し, $n = 2M$ で差が 0 となり, その後は増加する。最小値は

$$n = 2M, 2M + 1$$

でとる。その値は

$$c_M = a_{2M} = -\frac{(M-1)(2M-1)}{27M^2}.$$

よって

$$\lim_{M \rightarrow \infty} c_M = -\frac{2}{27}.$$

【総評】 2 階差分を 2 回の和で一般項に戻し、最後に離散的な最小値を求める重めの数列問題。目安時間は 35 分。(1)(2) は和の上端を間違えやすく、 $b_1 = 0, a_1 = 0$ を使って足し始めを明確にすることが重要である。(3) は連続変数の微分ではなく、整数列として $h(n+1) - h(n)$ を見ると、 $2M$ と $2M+1$ の 2 か所で同じ最小値を取ることを正確に説明できる。

【第 3 問】

実数 a は $a > 1$ とする。曲線 $y = e^x$ と直線 $y = a - 1$, 直線 $y = a$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに一回転させて得られる立体の体積を $V(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $V(a)$ を求めよ。
- (2) $V(a)$ を最小とする a の値を求めよ。
- (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (V(a) - V(a-1))$$

必要ならば, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を証明なしで用いてよい。

▶ 解法 1 (円板法と導関数の符号を用いる)

【方針】

回転軸が y 軸なので、曲線 $y = e^x$ を $x = \log y$ と見て、水平切片の半径を $\log y$ とする。(1) は $y = a - 1$ から $y = a$ までの円板の体積として積分する。(2) は積分区間の上端・下端がともに a に依存するため、微分すると端点の値の差になる。符号は $\log(a/(a-1))$ と $\log(a(a-1))$ で判定する。(3) は隣り合う長さ 1 の区間での積分差を、導関数 $2 \log y / y$ の最大値で押さえて 0 に近づける。

【解答】

(1) 曲線 $y = e^x$ は、 $y > 0$ に対して $x = \log y$ と書ける。 $a > 1$ なので、 $a - 1 < y < a$ の範囲では $y > 0$ である。求める図形を y 軸のまわりに回転させると、高さ y における断面は半径 $\log y$ の円である。したがって体積は

$$V(a) = \pi \int_{a-1}^a (\log y)^2 dy$$

である。

原始関数を求める。部分積分を 2 回用いると

$$\int (\log y)^2 dy = y(\log y)^2 - 2 \int \log y dy$$

であり、さらに

$$\int \log y dy = y \log y - y$$

だから

$$\int (\log y)^2 dy = y\{(\log y)^2 - 2 \log y + 2\}$$

である。よって $F(y) = y\{(\log y)^2 - 2 \log y + 2\}$ とおけば $V(a) = \pi\{F(a) - F(a-1)\}$ である。

(2) (1) の積分表示から

$$V(a) = \pi \int_{a-1}^a (\log y)^2 dy$$

である。上端と下端に注意して微分すると $V'(a) = \pi\{(\log a)^2 - (\log(a-1))^2\}$ である。これを因数分解すると $V'(a) = \pi\{\log a - \log(a-1)\}\{\log a + \log(a-1)\} = \pi \log \frac{a}{a-1} \cdot \log\{a(a-1)\}$ である。 $a > 1$ では $\log \frac{a}{a-1} > 0$ である。したがって $V'(a)$ の符号は $\log\{a(a-1)\}$ の符号で決まる。関数 $a(a-1)$ は $a > 1$ で増加し、 $a(a-1) = 1$ となるのは $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のときである。

よって $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ では $V'(a) < 0$ 、 $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ では $V'(a) > 0$ となる。したがって $V(a)$ を最小にする a は $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)

$$V(a) - V(a-1) = \pi \left\{ \int_{a-1}^a (\log y)^2 dy - \int_{a-2}^{a-1} (\log y)^2 dy \right\}$$

である。第 2 項で $y = u - 1$ と見ると、これは

$$V(a) - V(a-1) = \pi \int_{a-1}^a \{(\log y)^2 - (\log(y-1))^2\} dy$$

と書ける。 a が十分大きいとき、 $y-1 > 1$ である。関数 $f(y) = (\log y)^2$ について $f'(y) = \frac{2 \log y}{y}$ である。 $y \in [a-2, a]$ では、 $a \rightarrow \infty$ のとき $0 \leq \frac{2 \log y}{y} \leq \frac{2 \log(a)}{a-2}$ となり、右辺は 0 に近づく。平均変化の考え方から

$$0 \leq (\log y)^2 - (\log(y-1))^2 \leq \max_{a-2 \leq u \leq a} \frac{2 \log u}{u}$$

であるから、積分全体も 0 に近づく。

したがって $\lim_{a \rightarrow \infty} (V(a) - V(a-1)) = 0$ である。

▶ 解法 2 (対数の二乗積分と積分区間の移動を用いる)

【方針】

高さ y での回転半径は $|\log y|$ なので、体積を長さ 1 の移動区間上の積分

$$\pi \int_{a-1}^a (\log y)^2 dy$$

と表す。微分は端点値の差となり、最小値を決める。差分の極限は平均値の定理で導関数へ帰着する。

【解答】

(1) 高さ y では領域は $x = 0$ と $x = \log y$ の間にあり、 y 軸回転後の円板の半径は $|\log y|$ である。したがって

$$V(a) = \pi \int_{a-1}^a (\log y)^2 dy.$$

原始関数

$$\int (\log y)^2 dy = y\{(\log y)^2 - 2 \log y + 2\}$$

を用いて

$$V(a) = \pi [a\{(\log a)^2 - 2 \log a + 2\} - (a-1)\{(\log(a-1))^2 - 2 \log(a-1) + 2\}].$$

(2) 端点を微分すると

$$\frac{V'(a)}{\pi} = (\log a)^2 - \{\log(a-1)\}^2 = \log \frac{a}{a-1} \log\{a(a-1)\}.$$

$a > 1$ では第 1 因子が正なので、符号は $a(a-1) - 1$ で決まる。よって

$$a^2 - a - 1 = 0$$

の正の解で最小となり

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。

(3) $a > 2$ とする。平均値の定理により、ある $c \in (a-1, a)$ が存在して

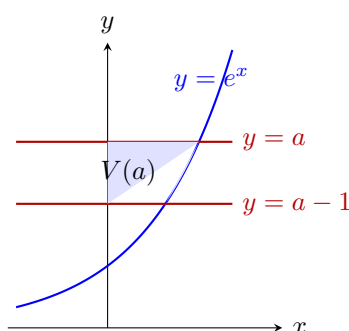
$$V(a) - V(a-1) = V'(c).$$

$c \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{V'(c)}{\pi} = \log\{c(c-1)\} \log \frac{c}{c-1} = \frac{\log\{c(c-1)\}}{c-1} (c-1) \log \left(1 + \frac{1}{c-1}\right) \rightarrow 0.$$

したがって

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \{V(a) - V(a-1)\} = 0.$$



【総評】 対数で表した半径を使う回転体体積の問題。目安時間は 24 分。 y 軸回転なので $x = \log y$ を半径にするのが第一の分岐点で、 x で積分しようとするとかえって複雑になる。(2) は $V'(a)$ の符号を $a(a-1)$ で判定し、最小点の前後で減少・増加を確認する。(3) は「増加が遅い」で済ませず、 $2 \log y/y \rightarrow 0$ によって隣り合う区間の積分差が 0 に近づくことを不等式で押さえるとよい。

【第 4 問】

正四面体 ABCD の頂点 A, B, C, D 上の動点 P が、時刻 0 には頂点 B にいるとする。0 以上の整数 n に対して、時刻 $n+1$ の P の位置が、時刻 n の P の位置から以下のルールに従って決まるとする。

- 時刻 n に P が頂点 A にいる場合
時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ で頂点 A, B, C, D にいる。
- 時刻 n に P が頂点 B にいる場合
時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ で頂点 A, B, C にいる。
- 時刻 n に P が頂点 C にいる場合
時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ で頂点 A, C, D にいる。
- 時刻 n に P が頂点 D にいる場合
時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ で頂点 A, B, D にいる。

0 以上の整数 n に対して、時刻 n に P が頂点 A, B, C, D にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) n が 3 の倍数のときの $b_n - c_n$ と $c_n - d_n$ を求めよ。
- (3) n が 3 の倍数のときの b_n, c_n, d_n を求めよ。

▶ 解法 1 (確率漸化式と 3 期ごとの差を用いる)

【方針】

まず全確率の和が 1 であることを使い、 a_{n+1} だけの漸化式を作る。次に b_n, c_n, d_n を個別に追うのではなく、差 $x_n = b_n - c_n$, $y_n = c_n - d_n$ を導入する。1 ステップの変化は $x_{n+1} = -y_n/3$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/3$ となり、3 ステップごとにどちらも $-1/27$ 倍になる。 $n = 3m$ では $y_n = 0$ なので、和 $b_n + c_n + d_n = 1 - a_n$ と差 $b_n - c_n$ から 3 つの確率を復元する。

【解答】

(1) 時刻 n に頂点 A にいる確率は a_n であり、頂点 B, C, D にいる確率の和は $b_n + c_n + d_n = 1 - a_n$ である。遷移規則から、時刻 $n+1$ に A にいる確率は $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n)$ である。したがって $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}a_n$ である。

初期状態では点 P は B にいるので $a_0 = 0$ である。この漸化式の一定値を A とすると $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}A$ より $A = \frac{2}{5}$ である。よって $a_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}\left(a_n - \frac{2}{5}\right)$ であり、

$$a_n - \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(a_0 - \frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

となる。したがって $a_n = \frac{2}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$ である。

(2) 差を $x_n = b_n - c_n$, $y_n = c_n - d_n$ とおく。まず遷移規則から $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}d_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n$, $d_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n$ である。したがって $x_{n+1} = b_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(c_n - d_n) = -\frac{1}{3}y_n$ であり、 $y_{n+1} = c_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - d_n) = \frac{1}{3}(x_n + y_n)$ である。

これを 3 回繰り返すと $x_{n+3} = -\frac{1}{27}x_n$, $y_{n+3} = -\frac{1}{27}y_n$ となる。実際、1 回目で $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(-\frac{1}{3}y_n, \frac{1}{3}(x_n + y_n)\right)$ であり、さらに計算すると 3 回後には上の式になる。

初期状態は $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = d_0 = 0$ だから $x_0 = b_0 - c_0 = 1$, $y_0 = c_0 - d_0 = 0$ である。したがって $n = 3m$ のとき $b_n - c_n = x_n = \left(-\frac{1}{27}\right)^m$ であり、 $c_n - d_n = y_n = 0$ である。

(3) $n = 3m$ とする。(2) より $c_n = d_n$ である。また $b_n + c_n + d_n = 1 - a_n$ である。ここで $\delta = \left(-\frac{1}{27}\right)^m$ とおくと $b_n - c_n = \delta$ である。 $c_n = d_n$ だから $b_n + 2c_n = 1 - a_n$ であり、 $b_n = c_n + \delta$ を代入すると $3c_n + \delta = 1 - a_n$ である。したがって $c_n = d_n = \frac{1 - a_n - \delta}{3}$ であり、 $b_n = c_n + \delta = \frac{1 - a_n + 2\delta}{3}$ である。

(1) より $a_n = \frac{2}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$ だから、 $n = 3m$ のとき $b_n = \frac{1 - a_n + 2\left(-\frac{1}{27}\right)^m}{3}$, $c_n = d_n = \frac{1 - a_n - \left(-\frac{1}{27}\right)^m}{3}$ である。すなわち明示的には

$$b_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^m,$$

$$c_n = d_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

である。

▶ 解法 2 (1 の 3 乗根で循環成分を対角化する)

【方針】

まず a_n は他の 3 頂点の確率和だけで閉じた 1 次漸化式になる。残る b_n, c_n, d_n は $\omega^3 = 1$ を用いて $z_n = b_n + \omega c_n + \omega^2 d_n$ とまとめると等比数列になる。逆変換し、 $3 \mid n$ で簡約する。

【解答】

(1) 全確率が 1 であり $b_n + c_n + d_n = 1 - a_n$ だから、初期値 $a_0 = 0$ と合わせて

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}, \quad a_n = \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\}.$$

(2) $\omega = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ とし、 $z_n = b_n + \omega c_n + \omega^2 d_n$ とおく。確率漸化式を代入すると a_n の係数が消え、

$$z_{n+1} = -\frac{\omega^2}{3}z_n, \quad z_0 = 1, \quad z_n = \left(-\frac{\omega^2}{3} \right)^n.$$

$3 \mid n$ なら $\omega^{2n} = 1$ なので $z_n = (-1/3)^n$ は実数である。したがって

$$b_n - c_n = \left(-\frac{1}{3} \right)^n, \quad c_n - d_n = 0.$$

(3) $s_n = b_n + c_n + d_n$ とおくと

$$s_n = 1 - a_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^n.$$

$3 \mid n$ では $z_n = \overline{z_n} = (-1/3)^n$ である。逆変換

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{s_n + z_n + \overline{z_n}}{3}, \\ c_n &= \frac{s_n + \omega^2 z_n + \omega \overline{z_n}}{3}, \\ d_n &= \frac{s_n + \omega z_n + \omega^2 \overline{z_n}}{3} \end{aligned}$$

へ代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \left(\frac{1}{6} \right)^n + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n, \\ c_n = d_n &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \left(\frac{1}{6} \right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \end{aligned}$$

となる。

【総評】 4 つの確率をそのまま追わず、和と差に分ける発想が重要な問題。目安時間は 32 分。(1) は全確率の和を使えば a_n だけで閉じた漸化式になる。(2) では $b_n - c_n$ と $c_n - d_n$ の 1 ステップ変化を丁寧に書き、3 ステップ後に $-1/27$ 倍されることを確認するのが核心である。(3) は $n = 3m$ のとき $c_n = d_n$ になるので、残りは和 $1 - a_n$ と差 $b_n - c_n$ から復元すればよい。

【第 5 問】

$f(x)$ を次の条件を満たす 3 次の多項式とする。

- (a) x^3 の係数は 1 である。
 (b) $0, 1, -1$ ではない複素数 ω が存在して、すべての自然数 n について $f(\omega^n) = 0$ となる

以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ または $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であることを示せ。ただし、 i は虚数単位とする。
 (2) $f(x)$ を求めよ。
 (3) $g(x)$ を次の多項式とする。

$$g(x) = \sum_{n=0}^{2021} x^n = x^{2021} + x^{2020} + \cdots + 1$$

$g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。

▶ 解法 1 (根の個数から 3 乗根を特定する)

【方針】

3 次多項式の根は高々 3 個である一方、条件は $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots$ がすべて根であることを要求する。したがって ω の累乗は高々 3 種類しか現れず、 $\omega \neq 0$ から ω は 1 の累乗根になる。 $\omega \neq 1, -1$ より位数は 3 なので、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ が従う。(2) では根が $1, \omega, \omega^2$ の 3 つと決まり、最高次係数 1 から $f(x) = x^3 - 1$ になる。(3) は $x^3 \equiv 1$ として指数を 3 で割った余りごとに数える。

【解答】

(1) 条件より、すべての自然数 n について $f(\omega^n) = 0$ である。つまり $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots$ はすべて $f(x)$ の根である。

ところが $f(x)$ は 3 次の多項式であり、恒等的に 0 ではないので、異なる根は高々 3 個である。したがって $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ の中には等しいものがある。すなわち、ある $1 \leq i < j \leq 4$ について $\omega^i = \omega^j$ である。 $\omega \neq 0$ だから $\omega^{j-i} = 1$ となる。よって ω は 1 の累乗根であり、その位数は 1, 2, 3 のいずれかである。

しかし $\omega \neq 1$ なので位数は 1 ではない。また位数が 2 なら $\omega^2 = 1$ より $\omega = \pm 1$ となるが、 $\omega \neq 1, -1$ に反する。したがって位数は 3 である。よって $\omega^3 = 1$ 、 $\omega \neq 1$ である。 $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ であり、 $\omega \neq 1$ だから $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ である。これを解いて $\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を得る。すなわち

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{または} \quad \omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。

(2) (1) より ω の位数は 3 であるから $\omega^3 = 1$ 、 $\omega^2 \neq \omega$ 、 $\omega \neq 1$ である。条件はすべての自然数 n について $f(\omega^n) = 0$ であるから、特に $f(\omega) = 0$ 、 $f(\omega^2) = 0$ 、 $f(\omega^3) = f(1) = 0$ である。

したがって $f(x)$ は 3 つの相異なる根 $1, \omega, \omega^2$ をもつ。さらに $f(x)$ は 3 次で、 x^3 の係数は 1 であるから $f(x) = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$ である。ここで $1, \omega, \omega^2$ は $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの根なので $(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2) = x^3 - 1$ である。よって $f(x) = x^3 - 1$ である。

(3) (2) より $f(x) = x^3 - 1$ である。したがって $f(x)$ で割った余りを考えるときは $x^3 \equiv 1$ としてよい。よって指数は 3 を法として考えればよい。 $g(x) = \sum_{n=0}^{2021} x^n$ には、 $n=0$ から 2021 までの 2022 個の項がある。また $2022 = 3 \cdot 674$ である。各 3 項 $x^{3m} + x^{3m+1} + x^{3m+2}$ は、 $x^3 \equiv 1$ のもとで $1 + x + x^2$ に合同である。したがって余りは $674(1 + x + x^2)$ すなわち $674x^2 + 674x + 674$ である。

▶ 解法 2 (3 を法とする指数の分類で余りを求める)

【方針】

条件から $\omega, \omega^2, \omega^3$ がモニック 3 次式の根であり、次の ω^4 もそのいずれかになることを使って $\omega^3 = 1$ を確定する。すると $f(x) = x^3 - 1$ 。和 $g(x)$ は指数を 3 で分類して余りを直接読む。

【解答】

(1) 条件より

$$f(\omega) = f(\omega^2) = f(\omega^3) = 0.$$

$\omega \neq 0, \pm 1$ なので $\omega, \omega^2, \omega^3$ は相異なる。モニック 3 次式 f はこの 3 数をすべて根にもつ。

さらに $f(\omega^4) = 0$ だから、 ω^4 は $\omega, \omega^2, \omega^3$ のいずれかに等しい。順に割り算すると

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 = 1, \quad \omega = 1$$

のいずれかとなる。後二つは条件に反するので

$$\omega^3 = 1.$$

また $\omega \neq 1$ だから

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

したがって

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

(2) 根は $\omega, \omega^2, 1$ であり、 f はモニック 3 次式だから

$$f(x) = (x - \omega)(x - \omega^2)(x - 1) = x^3 - 1.$$

(3) $2021 = 3 \cdot 673 + 2$ なので

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{2021} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{673} (x^{3k} + x^{3k+1} + x^{3k+2}) \\ &= (1 + x + x^2) \sum_{k=0}^{673} x^{3k}. \end{aligned}$$

$x^3 \equiv 1 \pmod{x^3 - 1}$ だから各 x^{3k} は余り 1 となる。項数は 674 個なので、求める余りは

$$674x^2 + 674x + 674.$$

【総評】 根の個数と 1 の 3 乗根を結びつける多項式問題。目安時間は 17 分。条件が「すべての自然数 n 」であるため、 ω^n の値が無限にばらばらなら 3 次式の根の個数を超えてしまう、という発想が中心である。(1) では $\omega \neq 0$ を使って累乗根にすること、位数 $1 \cdot 2$ を除外することを明示したい。(3) は $x^3 - 1$ で割るので、指数を 3 周期で数え、2022 項がちょうど 3 で割り切れることを確認する。