

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 2022 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標空間内の 5 点

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 1, 0), \quad B(2, 1, 2), \quad P(4, 0, -1), \quad Q(4, 0, 5)$$

を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。
- (3) 点 R が平面 α 上を動くとき、 $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

第 2 問

n を 3 以上の自然数, α, β を相異なる実数とすると, 以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

(2) (1) の A, B, C を n, α, β を用いて表せ。

(3) (2) の A について, n と α を固定して, β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

第 3 問

自然数 m, n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \cdots \cdots (1)$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。
- (3) (1) をみたす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。

第 4 問

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \cdots \cdots (1)$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

(A)

$$\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}dx = k \int_a^b f(x)dx + l \int_a^b g(x)dx$$

(B) $a \leq c \leq b$ のとき、

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(C) 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq h(x)$ ならば、

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx$$

ただし、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k , l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。定積分の性質 [ア] を用いて、

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \cdots \cdots (2)$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式 (2) と定積分の性質 [イ] より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \cdots \cdots (3)$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$$

が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき、

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを、導関数の定義に従って示せ。また、この等式と定積分の定義 (1) を用いて、定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 (1) と平均値の定理を用いて、次を示せ。

$a < b$ のとき、区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば、

$$\int_a^b g(x) dx > 0$$

(3) (A), (B), (C) のうち、空欄 [ア] に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで、不等式 (2) を示せ。

(4) (A), (B), (C) のうち、空欄 [イ] に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また、不等式 (3) を示せ。

第 5 問

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において， $\frac{dx}{dt} < 0$ ， $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分， x 軸，直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また， C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)