

九州大学 2022 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標空間内の 5 点

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 1, 0), \quad B(2, 1, 2), \quad P(4, 0, -1), \quad Q(4, 0, 5)$$

を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。
- (3) 点 R が平面 α 上を動くとき、 $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ に垂直なベクトルを成分で置き、内積の連立条件から単位法線ベクトルを決める。(2) はその法線ベクトルを用いて、点 P の平面 α に垂直な成分を取り除き、さらに同じ長さだけ反対側へ移して対称点を求める。(3) は平面での反射を用いた最短経路の問題で、 P を対称点 P' に移すと $|PR| = |P'R|$ となるので、最小化は直線 $P'Q$ と平面 α の交点を求める問題に帰着する。

【解答】

(1) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$ である。 $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを (u, v, w) とおくと $u + v = 0$, $2u + v + 2w = 0$ である。第 1 式から $v = -u$, これを第 2 式に代入して $u + 2w = 0$, $w = -\frac{u}{2}$ を得る。したがって法線方向は $\left(1, -1, -\frac{1}{2}\right)$ である。大きさは $\frac{3}{2}$ なので、 x 成分が正の単位ベクトルは $\vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ である。

(2)

平面 α は原点を通り、法線ベクトルとして $(2, -2, -1)$ をもつから $2x - 2y - z = 0$ で表される。点 $P(4, 0, -1)$ について $2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - (-1) = 9$ であり、 $(2, -2, -1)$ の大きさは 3 である。したがって P は平面から、 $\vec{n}$ の向きに距離 3 だけ離れている。

よって垂線の足を H とすると

$$H = P - 3\vec{n} = (4, 0, -1) - 3\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = (2, 2, 0)$$

である。対称点 P' は H を中点として P の反対側にあるから $P' = 2H - P = (0, 4, 1)$ である。

(3) P' は P を平面 α に関して対称移動した点である。 R が平面 α 上にあるとき、平面に関する対称性から $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{P'R}|$ である。したがって

$$|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{P'R}| + |\overrightarrow{RQ}|$$

であり、これは点 P' から R を通って Q へ行く折れ線の長さである。三角不等式より、この長さは直線 $P'Q$ 上に R があるとき最小になる。よって求める R は直線 $P'Q$ と平面 α の交点である。 $P' = (0, 4, 1)$, $Q = (4, 0, 5)$ だから、直線 $P'Q$ 上の点を $P' + \lambda(Q - P') = (4\lambda, 4 - 4\lambda, 1 + 4\lambda)$ とおく。これを平面 $2x - 2y - z = 0$ に代入すると $2(4\lambda) - 2(4 - 4\lambda) - (1 + 4\lambda) = 0$ すなわち $12\lambda - 9 = 0$ である。したがって $\lambda = \frac{3}{4}$ であり、 $R = (3, 1, 4)$ を得る。

▶ 解法 2 (正射影と一直線化)

【方針】

(1) は内積条件から単位法線を求める。(2) は垂線の足を平面上の点 $H = s\vec{a} + t\vec{b}$ と置き、 $P - H$ が $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直である連立方程式を解く。(3) は P を P' へ反射すると距離和が折れ線 $P'RQ$ になり、三角不等式の等号条件から R を直線 $P'Q$ と平面の交点にする。

【解答】

(1)

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = (2, 1, 2).$$

両方に垂直なベクトルを (u, v, w) とおくと

$$u + v = 0, \quad 2u + v + 2w = 0.$$

よって法線方向は $(2, -2, -1)$ であり、大きさは 3 だから

$$\vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

(2) 垂線の足を $H = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおく。 $(P - H) \cdot \vec{a} = (P - H) \cdot \vec{b} = 0$ より

$$\begin{cases} 2s + 3t = 4, \\ 3s + 9t = 6. \end{cases}$$

したがって $s = 2, t = 0$ で

$$H = (2, 2, 0).$$

よって

$$P' = 2H - P = (0, 4, 1).$$

(3) $R \in \alpha$ なら反射の性質から $PR = P'R$ である。したがって

$$PR + RQ = P'R + RQ \geq P'Q.$$

等号は P', R, Q がこの順に一直線上に並ぶときに成立する。

直線 $P'Q$ 上の点は

$$(0, 4, 1) + \lambda(4, -4, 4) = (4\lambda, 4 - 4\lambda, 1 + 4\lambda)$$

と表せる。平面 α の方程式

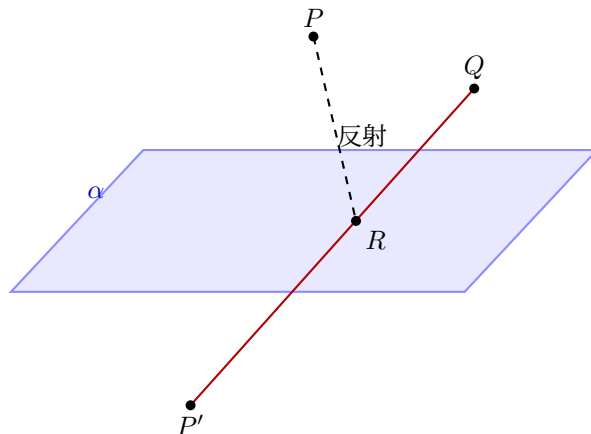
$$2x - 2y - z = 0$$

へ代入すると

$$12\lambda - 9 = 0, \quad \lambda = \frac{3}{4}.$$

$0 < \lambda < 1$ なので交点は線分 $P'Q$ 上にあり、等号が実現する。よって

$$R = (3, 1, 4).$$



【総評】 公開問題 PDF と原典 TeX を照合済み。空間ベクトルを反射による最短経路へつなぐ問題である。解法 1 は平面方程式，解法 2 は正射影を用いる。三角不等式の等号条件と，交点係数 $\lambda = 3/4$ が $0 < \lambda < 1$ を満たして線分上で実現することまで確認する。想定時間は 20 分程度。

【第 2 問】

n を 3 以上の自然数， α, β を相異なる実数とすると，以下の問いに答えよ。

- (1) 次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

- (2) (1) の A, B, C を n, α, β を用いて表せ。

- (3) (2) の A について， n と α を固定して， β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$(x - \alpha)(x - \beta)^2$ で割った余りは 2 次以下であり， $1, x - \alpha, (x - \alpha)(x - \beta)$ を基準にすれば問題の形に表せる。係数 A, B, C は， $x = \alpha$ と $x = \beta$ の値を比較し，さらに $x = \beta$ が 2 重に現れることを利用して両辺を微分してから $x = \beta$ を代入すると決まる。最後の極限は $\beta = \alpha + h$ とおき，2 次の項まで二項定理で展開すればよい。別解として， $\beta^n - \alpha^n$ の因数分解を使って極限を和の形で処理することもできる。

【解答】

(1)

整式 x^n を $(x - \alpha)(x - \beta)^2$ で割ると，商を $Q(x)$ ，余りを $R(x)$ として $x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + R(x)$ と表せる。ただし $R(x)$ は 2 次以下の整式である。

ここで $A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$ も 2 次以下の整式である。 $\alpha \neq \beta$ なので， A, B, C を適当に選べば任意の 2 次以下の余りをこの形で表せる。例えば最高次係数を A で合わせ，次に 1 次係数を B で合わせ，最後に定数項を C で合わせればよい。したがって条件を満たす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在する。

(2)

(1) の等式に $x = \alpha$ を代入すると， $x - \alpha$ を含む項はすべて消えるので $C = \alpha^n$ である。

次に $x = \beta$ を代入すると， $(x - \beta)$ を含む項は消え， $\beta^n = B(\beta - \alpha) + C$ となる。よって $B = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$ である。

さらに両辺を x で微分する。 $(x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x)$ の微分は， $x = \beta$ を代入すると各項に $(x - \beta)$ が残るため 0 になる。また $\{A(x - \alpha)(x - \beta)\}' = A\{(x - \beta) + (x - \alpha)\}$ であるから， $x = \beta$ では $A(\beta - \alpha)$ となる。したがって $n\beta^{n-1} = A(\beta - \alpha) + B$ である。これに B の値を代入して

$$A = \frac{n\beta^{n-1}}{\beta - \alpha} - \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{n\beta^{n-1}(\beta - \alpha) - (\beta^n - \alpha^n)}{(\beta - \alpha)^2}$$

を得る。

(3) $\beta = \alpha + h$ とおく。 $h \rightarrow 0$ が $\beta \rightarrow \alpha$ に対応する。二項定理より、ある整式 $P(h), Q(h)$ を用いて

$$(\alpha + h)^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}h^2 + h^3P(h)$$

また $n(\alpha + h)^{n-1}h = n\alpha^{n-1}h + n(n-1)\alpha^{n-2}h^2 + h^3Q(h)$ と表せる。したがって (2) の A の分子は、ある整式 $R(h)$ を用いて

$$\left\{ n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \right\} \alpha^{n-2}h^2 + h^3R(h) = \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}h^2 + h^3R(h)$$

である。分母は h^2 だから、 $h \rightarrow 0$ とすると $hR(h) \rightarrow 0$ であり $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A = \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}$ である。

▶ 解法 2 (差の冪の因数分解)

【方針】

(1)(2) は 2 次以下の余りを問題の基底で表し、 $x = \alpha$, $x = \beta$, 微分後の $x = \beta$ の 3 条件で決める。(3) では二項展開を使わず、 $\beta^j - \alpha^j$ の因数分解を有限和に直す。各項の極限を直接取ること、1 次項の相殺を式の差として処理する。

【解答】

(1) x^n を $(x - \alpha)(x - \beta)^2$ で割った余りを $R(x)$ とすると $\deg R \leq 2$ である。3 つの整式

$$(x - \alpha)(x - \beta), \quad x - \alpha, \quad 1$$

は 2 次以下の整式全体の基底になる。実際、最高次係数、1 次係数、定数項の順に係数を合わせられる。よって

$$R(x) = A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

と一意に表せ、所要の $A, B, C, Q(x)$ が存在する。

(2) $x = \alpha$ を代入して

$$C = \alpha^n.$$

$x = \beta$ を代入して

$$\beta^n = B(\beta - \alpha) + C, \quad B = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}.$$

さらに両辺を微分して $x = \beta$ を代入すると

$$n\beta^{n-1} = A(\beta - \alpha) + B.$$

したがって

$$A = \frac{n\beta^{n-1}}{\beta - \alpha} - \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{n\beta^{n-1}(\beta - \alpha) - (\beta^n - \alpha^n)}{(\beta - \alpha)^2}.$$

(3) 差の冪の因数分解から

$$\frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^{n-1-j} \alpha^j.$$

よって

$$\begin{aligned} A &= \frac{n\beta^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \beta^{n-1-j} \alpha^j}{\beta - \alpha} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \beta^{n-1-j} \frac{\beta^j - \alpha^j}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

さらに

$$\frac{\beta^j - \alpha^j}{\beta - \alpha} = \sum_{k=0}^{j-1} \beta^{j-1-k} \alpha^k \longrightarrow j\alpha^{j-1} \quad (\beta \rightarrow \alpha).$$

したがって各項は $j\alpha^{n-2}$ に近づき、

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \alpha} A &= \sum_{j=1}^{n-1} j\alpha^{n-2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}. \end{aligned}$$

【総評】 公開問題 PDF と原典 TeX を照合済み。二重因子 $x - \beta$ のため、値だけでなく微分値も余りを決める条件になる。 $x = \alpha$, $x = \beta$, 微分後に $x = \beta$ の順で代入すると混乱しにくい。極限は解法 1 の二項展開と、解法 2 の差の冪の有限和で相互確認できる。想定時間は 25 分程度で、分子の 1 次項が消え 2 次項が残ることを答案上で明示する。

【第 3 問】

自然数 m, n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \cdots \cdots (1)$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。
- (3) (1) をみたす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず式の偶奇から n が奇数であることを確認し、 $(n^2+1)/2$ と $(n^2-1)/2$ が整数で差 1 であることから互いに素と分かる。次に n^2-1 が 8, 3, 7 のそれぞれで割り切れることを合同式で示し、互いに素な積として 168 の倍数を得る。最後はこの条件を使って具体例を探す。 n^2-1 を 168 の適当な倍数にし、 $(n^4-1)/210$ が平方数になるものを作ればよい。

【解答】

(1)

与式 $n^4 = 1 + 210m^2$ の右辺は奇数である。したがって n^4 は奇数であり、 n も奇数である。よって n^2 も奇数なので $\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}$ はいずれも整数である。

この 2 つの整数の差は $\frac{n^2+1}{2} - \frac{n^2-1}{2} = 1$ である。差が 1 の 2 整数に共通の正の約数があるとすれば、その約数は 1 も割り切る。したがって 2 つの整数は互いに素である。

(2)

まず n は奇数だから、奇数の平方は 8 で割って 1 余る。したがって $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であり、 n^2-1 は 8 の倍数である。次に、もとの式を 3 で考えると、 $210m^2$ は 3 の倍数なので $n^4 \equiv 1 \pmod{3}$ である。もし $n \equiv 0 \pmod{3}$ なら左辺は 0 になって矛盾する。よって $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ であり、平方数の余りから $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ となる。したがって n^2-1 は 3 の倍数である。

同様に 7 で考えると $n^4 \equiv 1 \pmod{7}$ である。7 で割った平方数の余りは 0, 1, 2, 4 のいずれかであり、このうちさらに 2 乗して 1 になるものは 1 だけである。よって $n^2 \equiv 1 \pmod{7}$ であり、 n^2-1 は 7 の倍数である。8, 3, 7 は互いに素であるから、 n^2-1 は $8 \cdot 3 \cdot 7 = 168$ の倍数である。

(3)

(2) より n^2-1 は 168 の倍数である。具体例を作るため、 $n^2-1 = 1680$ と取ってみると $n^2 = 1681 = 41^2$ となるので $n = 41$ が候補になる。このとき

$$\frac{n^4-1}{210} = \frac{(n^2-1)(n^2+1)}{210} = \frac{1680 \cdot 1682}{210}$$

である。計算すると $\frac{1680 \cdot 1682}{210} = 8 \cdot 1682 = 13456 = 116^2$ であるから、 $m = 116$ とすれば $41^4 = 1 + 210 \cdot 116^2$ が成り立つ。したがって条件を満たす自然数の組の一つは $(m, n) = (116, 41)$ である。

▶ 解法 2 (互いに素な 2 因子から構成)

【方針】

(1)(2) は偶奇と合同式で示す。(3) では m が偶数であることから $m = 2q$ とおき, 互いに素な連続 2 整数 $(n^2 + 1)/2$, $(n^2 - 1)/2$ の積が $210q^2$ になる構造を使う。 $29^2 - 1 = 840 = 210 \cdot 2^2$ という連続する平方数の関係から $n = 41$ を構成する。

【解答】

(1) 与式の右辺は奇数なので n は奇数である。したがって

$$\frac{n^2 + 1}{2}, \quad \frac{n^2 - 1}{2}$$

は整数であり, その差は 1 である。よって両者は互いに素である。

(2) 奇数 n について $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ である。また与式から

$$n^4 \equiv 1 \pmod{3}, \quad n^4 \equiv 1 \pmod{7}.$$

平方剰余を調べると

$$n^2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad n^2 \equiv 1 \pmod{7}.$$

したがって $n^2 - 1$ は 8, 3, 7 の全てで割り切れる。これらは互いに素なので

$$168 \mid n^2 - 1.$$

(3) n は奇数だから $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$ である。与式から $16 \mid 210m^2$ となるため m は偶数である。 $m = 2q$ とおくと

$$\frac{n^2 + 1}{2} \cdot \frac{n^2 - 1}{2} = 210q^2. \quad (1)$$

ここで

$$29^2 - 1 = 840 = 210 \cdot 2^2$$

に注目する。そこで

$$\frac{n^2 + 1}{2} = 29^2 = 841, \quad \frac{n^2 - 1}{2} = 840$$

と取ると, 両者は確かに差 1 である。第 1 式から

$$n^2 = 1681 = 41^2, \quad n = 41.$$

また (1) より

$$210q^2 = 841 \cdot 840 = 210(29 \cdot 2)^2$$

だから $q = 58$, したがって $m = 2q = 116$ である。よって一組は

$$(m, n) = (116, 41).$$

【総評】 公開問題 PDF と原典 TeX を照合済み。 $n^2 - 1$ が 8, 3, 7 の倍数であることを別々に証明し, 互いに素な積 168 へまとめる。(3) は一般解ではなく一組の構成でよい。解法 1 は $n^2 - 1 = 1680$ を発見する方法, 解法 2 は互いに素な連続 2 因子の積から 29^2 と 840 を組み合わせる方法で, なぜ 41, 116 が現れるかを説明する。想定時間は 22 分程度。

【第 4 問】

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \dots\dots (1)$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

(A)

$$\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}dx = k \int_a^b f(x)dx + l \int_a^b g(x)dx$$

(B) $a \leq c \leq b$ のとき、

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(C) 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq h(x)$ ならば、

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx$$

ただし、 $f(x), g(x), h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k, l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。
定積分の性質 [ア] を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (2)$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式 (2) と定積分の性質 [イ] より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots\dots (3)$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つ。

(1) 関数 $F(x), G(x)$ が微分可能であるとき、

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを、導関数の定義に従って示せ。また、この等式と定積分の定義 (1) を用いて、定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 (1) と平均値の定理を用いて、次を示せ。

$a < b$ のとき、区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば、

$$\int_a^b g(x)dx > 0$$

- (3) (A), (B), (C) のうち、空欄 [ア] に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで、不等式 (2) を示せ。
- (4) (A), (B), (C) のうち、空欄 [イ] に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また、不等式 (3) を示せ。

【方針】

理系版では、まず導関数の定義から和の微分公式を示す必要がある。その後は定積分の定義に戻り、 $F+G$ が $f+g$ の原始関数であることを利用して性質 (A) の特別な場合を証明する。(2) は原始関数に平均値の定理を適用し、 $G(b)-G(a)=g(c)(b-a)$ と表す。(3)(4) は文中の区分求積の証明で、増加関数を小区間の端点値で挟み、性質 (C) で積分評価にし、最後に性質 (B) で全区間の積分へつなげる。

【解答】

(1)

導関数の定義に従うと

$$\begin{aligned}\{F+G\}'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F(x+h)+G(x+h)\} - \{F(x)+G(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \right\} \\ &= F'(x) + G'(x)\end{aligned}$$

である。

次に $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ とする。上で示した等式より $\{F(x)+G(x)\}' = f(x)+g(x)$ であるから、 $F+G$ は $f+g$ の原始関数である。したがって定積分の定義から

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\} dx &= \{F(b)+G(b)\} - \{F(a)+G(a)\} \\ &= \{F(b)-F(a)\} + \{G(b)-G(a)\} \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

を得る。

(2) $G'(x) = g(x)$ となる関数 $G(x)$ を取る。 G は $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能であるから、平均値の定理により、ある c ($a < c < b$) が存在して $G(b)-G(a) = G'(c)(b-a)$ が成り立つ。ここで $G'(c) = g(c) > 0$ であり、 $a < b$ より $b-a > 0$ である。したがって

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a) = g(c)(b-a) > 0$$

である。

(3)

空欄 [ア] に入るのは (C) である。 f は増加関数なので、 $\frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}$ では $f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{i}{n}\right)$ である。左右は定数関数であり、定数 c に対して

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} c dx = c \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \frac{c}{n}$$

である。性質 (C) を用いれば

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

となり、不等式 (2) が示される。

(4)

空欄 [イ] に入るのは (B) である。

(2) の不等式を $i = 1, 2, \dots, n$ で足し合わせる。性質 (B) より

$$\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

であるから

$$S_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

を得る。したがって左側の不等式から

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n$$

である。また右側の不等式から

$$\int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

である。右辺は望遠和になり、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right\} = \frac{1}{n} \{f(1) - f(0)\}$$

である。よって

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

が成り立つ。

【総評】 公開問題 PDF と原典 TeX を照合済み。理系版では、和の微分公式を導関数の定義から示し、正値関数の積分を平均値の定理で証明するところまで指定される。差分商を 2 項へ分ける極限操作、 $G(b) - G(a) = g(c)(b - a)$ の正値性、性質 (C) での端点定数関数との比較、性質 (B) での小区間結合を順に書く。想定時間は 22 分程度。指定道具に忠実な一つの完全証明を優先する。

【第 5 問】

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において、 $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分、 x 軸、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また、 C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は媒介変数表示を微分し、 $0 < t < \pi/6$ で t と $5t$ がどの範囲にあるかを使って符号を判定する。(2) は曲線の端点がそれぞれ x 軸上と直線 $y = x/\sqrt{3}$ 上にあることを確認し、境界の 2 本の線分が原点を通るため、

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$$

で面積を求める。計算の係数を落としやすいので、 $xy' - yx'$ を丁寧に展開する。別解として、(1) の単調性を用いて曲線を上側境界と見なし、三角形の面積と

$$- \int y dx$$

を足す方法も使える。(3)(4) は $t \mapsto -t$ による対称性と、加法定理による $t \mapsto t + \pi/3$ の回転対応から概形を作る。

【解答】

(1) $\frac{dx}{dt} = -5\sin t - 5\sin 5t = -5(\sin t + \sin 5t)$ である。 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ では $0 < t < \frac{\pi}{6}$, $0 < 5t < \frac{5\pi}{6} < \pi$ だから $\sin t > 0$, $\sin 5t > 0$ である。よって $\frac{dx}{dt} < 0$ である。

また $\frac{dy}{dt} = 5\cos t - 5\cos 5t = 5(\cos t - \cos 5t)$ である。 $0 < t < 5t < \pi$ で, $\cos x$ は $0 \leq x \leq \pi$ で減少するから $\cos t > \cos 5t$ である。したがって $\frac{dy}{dt} > 0$ である。以上より $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} < 0$ が成り立つ。

(2)

端点を確認すると, $t = 0$ で $(x, y) = (6, 0)$ であり, $t = \frac{\pi}{6}$ で

$$x = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{5\pi}{6} = 2\sqrt{3}, \quad y = 5 \cdot \frac{1}{2} - \sin \frac{5\pi}{6} = 2$$

である。この点は $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 上にある。

求める図形の境界は, 原点から $(6, 0)$ への x 軸上の線分, 曲線の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分, および $(2\sqrt{3}, 2)$ から原点への直線上の線分である。

曲線部分で部分積分を行うと

$$\int x dy = [xy]_{t=0}^{t=\pi/6} - \int y dx = 4\sqrt{3} - \int y dx.$$

したがって

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx) = 2\sqrt{3} - \int y dx$$

となる。右辺は, 原点・ $(2\sqrt{3}, 0)$ ・ $(2\sqrt{3}, 2)$ の三角形の面積と, 曲線下の面積の和であり, まさに求める面積である。よって面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

で求められる。

ここで $x = 5\cos t + \cos 5t$, $y = 5\sin t - \sin 5t$ より $\frac{dx}{dt} = -5\sin t - 5\sin 5t$, $\frac{dy}{dt} = 5\cos t - 5\cos 5t$ である。したがって

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= (5\cos t + \cos 5t)(5\cos t - 5\cos 5t) \\ &\quad - (5\sin t - \sin 5t)(-5\sin t - 5\sin 5t) \\ &= 20 - 20\cos 6t \end{aligned}$$

である。よって

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} 20(1 - \cos 6t) dt = 10 \left[t - \frac{\sin 6t}{6} \right]_0^{\pi/6} = \frac{5\pi}{3}$$

である。

(3)

まず

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t)$$

である。したがって, 媒介変数が t の点と $-t$ の点は x 軸に関して対称であり, 曲線 C は x 軸に関して対称である。

次に $X = x(t)$, $Y = y(t)$ とおく。 $5(t + \pi/3) \equiv 5t - \pi/3 \pmod{2\pi}$ であるから, 加法定理より

$$\begin{aligned} x\left(t + \frac{\pi}{3}\right) &= 5\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= X\cos\frac{\pi}{3} - Y\sin\frac{\pi}{3}, \\ y\left(t + \frac{\pi}{3}\right) &= 5\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(5t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= X\sin\frac{\pi}{3} + Y\cos\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

右辺は点 (X, Y) を原点のまわりに反時計回りに $\pi/3$ 回転した座標である。必要なら $t + \pi/3$ から 2π の整数倍を引けば、媒介変数を $-\pi \leq t < \pi$ に取れる。よって回転後の点も C 上にある。

(4)

一つの弧の代表点は

$$t = 0 : (6, 0), \quad t = \frac{\pi}{6} : (2\sqrt{3}, 2), \quad t = \frac{\pi}{3} : (3, 3\sqrt{3})$$

である。(1) より、前半 $0 < t < \pi/6$ では x は減少し、 y は増加する。また、 x 軸に関する対称移動と $\pi/3$ 回転を続けて行くと直線 $y = x/\sqrt{3}$ に関する対称移動になるので、後半の弧は前半の弧をこの直線に関して折り返した形になる。

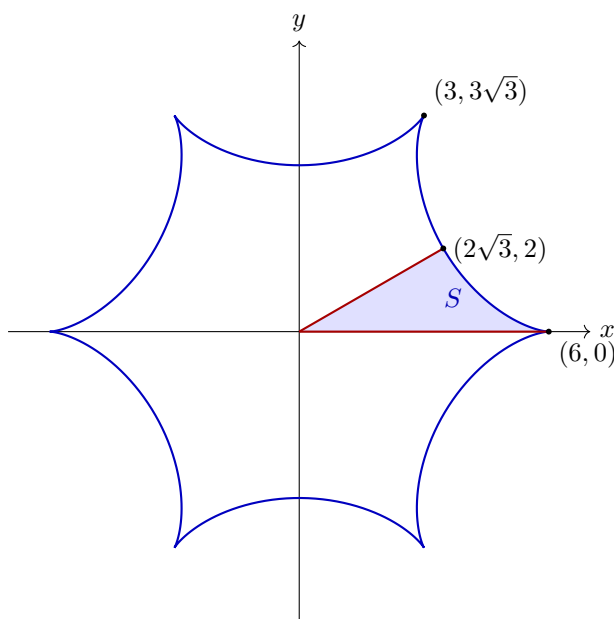
さらに

$$\frac{dx}{dt} = -5(\sin t + \sin 5t), \quad \frac{dy}{dt} = 5(\cos t - \cos 5t)$$

は $t = k\pi/3$ でともに 0 になる。したがって六つの尖点は

$$(6, 0), (3, 3\sqrt{3}), (-3, 3\sqrt{3}), (-6, 0), (-3, -3\sqrt{3}), (3, -3\sqrt{3})$$

である。以上の一つの弧を $\pi/3$ ずつ回転してつなぐと、下図のような 6 回対称の閉曲線を得る。



▶ 解法 2 ((2) を縦の面積で直接計算)

【方針】

(1)(3)(4) は解法 1 と同じである。(2) だけ別に、 x の単調減少を用いて曲線をグラフとみなす。原点から $x = 2\sqrt{3}$ までの三角形と、 $x = 2\sqrt{3}$ から 6 までの曲線下の面積に分ける。後者を媒介変数積分に直し、3 つの三角積分を積和公式で最後まで計算する。

【解答】

(1)

符号判定は解法 1 と同じである。

(2) $0 < t < \pi/6$ では $dx/dt < 0$ なので、曲線部分は x の関数のグラフとみなせる。求める面積は

- 原点、 $(2\sqrt{3}, 0)$ 、 $(2\sqrt{3}, 2)$ の三角形- $x = 2\sqrt{3}$ から $x = 6$ までの曲線下の部分

の和である。三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}.$$

曲線下の面積を I とすると

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{2\sqrt{3}}^6 y \, dx \\
 &= - \int_0^{\pi/6} y(t)x'(t) \, dt \\
 &= 5 \int_0^{\pi/6} (5 \sin t - \sin 5t)(\sin t + \sin 5t) \, dt \\
 &= 5 \int_0^{\pi/6} \{5 \sin^2 t + 4 \sin t \sin 5t - \sin^2 5t\} \, dt.
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/6} \sin^2 t \, dt &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}, \\
 \int_0^{\pi/6} \sin t \sin 5t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\cos 4t - \cos 6t) \, dt = \frac{\sqrt{3}}{16}, \\
 \int_0^{\pi/6} \sin^2 5t \, dt &= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 10t}{20} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{40}.
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 I &= 5 \left\{ 5 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{40} \right) \right\} \\
 &= \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

よって

$$S = 2\sqrt{3} + I = \frac{5\pi}{3}.$$

(3)

対称性の証明は解法 1 と同じである。

(4)

概形の構成は解法 1 と同じである。

【総評】 公開問題 PDF と原典 TeX を照合済み。媒介変数曲線の微分，面積，対称性，概形を統合した重い問題である。(1) は $5t$ の範囲，(2) は積分の向きと三角形の切り分け，(3) は $t \mapsto -t$ と $t \mapsto t + \pi/3$ ，(4) は 6 回対称性が採点の核になる。解法 2 では省略されがちな 3 つの三角積分を全て展開した。想定時間は 35 分程度で，端点 $(6, 0)$ ， $(2\sqrt{3}, 2)$ と尖点 6 個を図に明示する。