

入 学 試 験 問 題

数 学



九 州 大 学 2023 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。

(2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α , β , γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき, $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

第 2 問

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (2) $\alpha > 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。

第 3 問

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して、次の条件を考える。

条件Ⅰ $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件Ⅱ $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件Ⅰがすべての $\vec{q}$ に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}, \vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし、 x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\vec{q}$ に対して条件Ⅱが成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

第 4 問

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
- (B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
- (C) $f(0) \neq 0$
- (D) $f(x)$, $g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1$

(1) 条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。

以上のことから (2) $f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で,
 $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$ が成立することが示される。

(3) 上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ であることが,
実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。

よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに, a, b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)' $f(x)$, $g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$, $g'(0) = b$

におきかえて, 条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも, 条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

◇ M4(245—64)

とおくと、(4)条件 (A), (B), (C), (D) において、

$f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。

すると前半の議論により、 $p(x)$, $q(x)$ がまず求まり、このことを用いると $f(x) = [\text{ア}]$, $g(x) = [\text{イ}]$ が得られる。

(1) 下線部 (1) について、 $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ となることを示せ。

(2) 下線部 (2) について、 $f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり、 $f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 (3) について、下線部 (1), 下線部 (2) の事実を用いることにより、 $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。

(4) 下線部 (4) について、条件 (B), (D) において、 $f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が、

(B) すべての x, y について $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

(D) $p(x)$, $q(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $p'(0) = 0$, $q'(0) = 1$

を満たすことを示せ。また空欄 [ア], [イ] に入る関数を求めよ。

第 5 問

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2 \sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線 C のうち $y \leq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)