

九州大学 2023 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。
 (2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は係数が左右対称なので、 $x = 0$ が解でないことを確認してから x^2 で割り、 $x + \frac{1}{x}$ による相反方程式として解く。(2) は $u = \alpha - \beta, v = \beta - \gamma$ とおき、 $\gamma - \alpha = -(u + v)$ を使って 4 乗和を因数分解する。最後に u/v の偏角と絶対値から 3 辺の長さが等しいことを示す。

【解答】

(1) $x = 0$ は方程式の解でない。そこで両辺を x^2 で割ると $x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ である。これは $(x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) + 1 = 0$ と書ける。したがって $(x + \frac{1}{x} - 1)^2 = 0$ であり、 $x + \frac{1}{x} = 1$ となる。両辺に x をかけて $x^2 - x + 1 = 0$ を得る。よって $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ である。なお、もとの 4 次式は $(x^2 - x + 1)^2$ であり、これらは重解である。

(2) $u = \alpha - \beta, v = \beta - \gamma$ とおくと $\gamma - \alpha = -(u + v)$ である。条件は $u^4 + v^4 + (u + v)^4 = 0$ となる。左辺を展開すると $u^4 + v^4 + (u + v)^4 = 2(u^2 + uv + v^2)^2$ であるから、 $u^2 + uv + v^2 = 0$ を得る。

三角形 ABC を考えているので、 $v = \beta - \gamma \neq 0$ である。両辺を v^2 で割ると $(\frac{u}{v})^2 + \frac{u}{v} + 1 = 0$ である。ここで $X = -\frac{u}{v}$ とおくと $X^2 - X + 1 = 0$ となるので、(1) より $X = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。したがって $\frac{u}{v} = -X$ は絶対値が 1 で、偏角が $\pm \frac{2\pi}{3}$ の複素数である。

よって $|u| = |v|$ である。また、 u/v の偏角が $\pm \frac{2\pi}{3}$ であるから、 $1 + u/v$ の絶対値も 1 である。したがって $|u + v| = |v| \left| 1 + \frac{u}{v} \right| = |v|$ である。すなわち $|\alpha - \beta| = |\beta - \gamma| = |\gamma - \alpha|$ となる。三角形 ABC の 3 辺の長さがすべて等しいので、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

▶ 解法 2 (第 1 問の 4 次方程式を回転比に使う方法)

【方針】

(1) は 4 次式を平方に因数分解する。(2) では $z = \alpha - \beta$, $w = \gamma - \beta$ とおき, $x = w/z$ が (1) と同じ 4 次方程式を満たすことを示す。解 $x = \cos(\pi/3) \pm i \sin(\pi/3)$ から, 点 C は点 A を B のまわりに $\pm\pi/3$ 回転した点だと読む。

【解答】

(1)

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2$$

だから

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

よって

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

であり, それぞれ 2 重解である。

(2)

$$z = \alpha - \beta, \quad w = \gamma - \beta$$

とおく。三角形の頂点は異なるので $z \neq 0$ である。また $\beta - \gamma = -w$, $\gamma - \alpha = w - z$ だから, 与式は

$$z^4 + w^4 + (w - z)^4 = 0.$$

z^4 で割り, $X = w/z$ とおくと

$$1 + X^4 + (X - 1)^4 = 0,$$

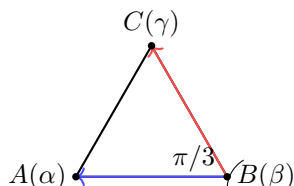
すなわち

$$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 = 0$$

となる。(1) より

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}.$$

したがって $\overrightarrow{BC}$ は $\overrightarrow{BA}$ を $\pm\pi/3$ 回転したベクトルであり, 長さは変わらない。



よって $BA = BC$ かつ $\angle ABC = \pi/3$ であるから,

$\triangle ABC$ は正三角形

である。

【総評】 相反方程式と複素数平面上の辺ベクトルを組み合わせる問題。目安時間は 18~22 分。(1) では 4 次方程式が実質的に 2 次方程式の 2 乗になることを見抜くのが入口である。(2) は $\gamma - \alpha = -(u+v)$ と置けるかが決め手で, $u^2 + uv + v^2 = 0$ から角度 120° と長さの一致を読み取れば, 正三角形であることが自然に出る。因数分解から 3 辺の長さを比較する方法と, (1) の 4 次方程式を辺ベクトルの回転比にそのまま利用する方法を相互検算に使える。回転角 $\pi/3$ を図示した。

【第 2 問】

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (2) $\alpha > 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

絶対値を外すと、 $a_n \geq 1$ なら $a_{n+1} = 2a_n - 2$ 、 $a_n < 1$ なら $a_{n+1} = 0$ である。したがって、一度 1 未満になれば次の項からずっと 0 になる。各 α の範囲で、初期値がすぐ 1 未満へ落ちるか、 $a_n - 2$ が倍々に増えて発散するか、または有限回後に 1 未満へ落ちるかを判定する。

【解答】

まず漸化式を場合分けする。 $a_n \geq 1$ のときは $a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 = 2a_n - 2$ であり、 $a_n < 1$ のときは $a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 = (1 - a_n) + a_n - 1 = 0$ である。特に、一度 $a_n < 1$ となれば、その次から 0 が続く。

(1) $\alpha \leq 1$ のとき、 $a_1 = \alpha \leq 1$ である。 $\alpha < 1$ なら上の後半の場合から $a_2 = 0$ であり、 $\alpha = 1$ でも $a_2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ である。以後は $a_n = 0$ が続く。したがって数列は 0 に収束する。

(2) $\alpha > 2$ とする。 $a_n > 2$ なら $a_n \geq 1$ なので $a_{n+1} = 2a_n - 2$ であり、 $a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$ である。 $a_1 - 2 = \alpha - 2 > 0$ だから帰納的に $a_n - 2 = 2^{n-1}(\alpha - 2)$ となる。よって $a_n \rightarrow +\infty$ であり、数列は正の無限大に発散する。

(3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のときは $a_1 \geq 1$ なので $a_2 = 2\alpha - 2$ である。この範囲では $0 < a_2 < 1$ となる。したがって $a_3 = 0$ であり、以後も 0 が続く。よって数列は 0 に収束する。

(4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ とする。 $a_n \geq 1$ である間は $a_{n+1} = 2a_n - 2$ である。そこで $b_n = a_n - 1$ とおくと、この間は $b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = 2a_n - 3 = 2b_n - 1$ である。この漸化式を解くと $b_n = 1 - 2^{n-1}(2 - \alpha)$ となる。実際、 $b_1 = \alpha - 1 = 1 - (2 - \alpha)$ であり、上の式は漸化式 $b_{n+1} = 2b_n - 1$ を満たす。

ここで $2 - \alpha > 0$ であるから、 $2^{n-1}(2 - \alpha)$ はいくらでも大きくなる。したがって有限回のうちに $b_n < 0$ 、すなわち $a_n < 1$ となる。すると次の項は 0 になり、以後も 0 が続く。よってこの場合も数列は 0 に収束する。

▶ 解法 2 (固定点 2 からのずれを追う方法)

【方針】

写像 $F(x) = |x - 1| + x - 1$ は $x \geq 1$ で $F(x) - 2 = 2(x - 2)$ 、 $x < 1$ で $F(x) = 0$ である。軌道が 1 以上にある間は $a_n = 2 + 2^{n-1}(\alpha - 2)$ と明示できるので、 $\alpha < 2$ では有限回後に 1 未満へ落ち、 $\alpha > 2$ では増大することを一つの式で判定する。

【解答】

写像

$$F(x) = |x - 1| + x - 1$$

は

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 2 & (x \geq 1), \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$

である。したがって一度 $a_n < 1$ となれば $a_{n+1} = 0$ となり、以後はすべて 0 である。

$a_k \geq 1$ が続く間は

$$a_{k+1} - 2 = 2(a_k - 2)$$

だから

$$a_n = 2 + 2^{n-1}(\alpha - 2) \quad (1)$$

である。

(1) $\alpha < 1$ なら直ちに $a_2 = 0$, $\alpha = 1$ でも $a_2 = 0$ である。よって 0 に収束する。

(2) $\alpha > 2$ なら (1) は常に 2 より大きく,

$$a_n = 2 + 2^{n-1}(\alpha - 2) \rightarrow +\infty.$$

よって正の無限大に発散する。

(3) $1 < \alpha < 3/2$ では

$$a_2 = 2\alpha - 2 < 1$$

だから $a_3 = 0$ となり, 以後も 0 である。よって

$$a_n \rightarrow 0$$

である。

(4) $3/2 \leq \alpha < 2$ とする。 $2 - \alpha > 0$ なので

$$2^{N-1}(2 - \alpha) > 1$$

を満たす自然数 N が存在する。そのような最小の N をとると, $k < N$ では (1) の値が 1 以上であるから漸化式を適用でき,

$$a_N = 2 - 2^{N-1}(2 - \alpha) < 1$$

となる。よって $a_{N+1} = 0$ であり, 以後も 0 である。

したがって

$$a_n \rightarrow 0$$

である。

【総評】 絶対値付き漸化式を一次写像の反復として分類する問題。目安時間は 18~22 分。最初に $a_n \geq 1$ と $a_n < 1$ で写像を分け、「1 未満になったら次から 0」という吸収状態を押さえると全体が見える。 $\alpha > 2$ だけは $a_n - 2$ が 2 倍ずつ増えるため発散し、 $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ では有限回後に 1 未満へ落ちることを式で示すのが採点上の要点である。場合分けによる標準解法に加え、固定点 2 からのずれ $a_n - 2$ を追う統一的な方法を示した。 $1 < \alpha < 2$ では有限回後に 1 未満へ落ちることを最小の到達時刻で厳密に確認した。

【第 3 問】

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して, $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して, 次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての $\vec{q}$ に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下, $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}, \vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし, x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\vec{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は $D = 0$ なら $\vec{m}, \vec{n}$ が平行になり、一次結合で平面全体を表せないことを示す。(2) は文系第 3 問と同じく、内積条件を 2 元連立方程式として解く。(3) は整数成分の任意の $\vec{q}$ が整数係数で表せるなら、特に $(1, 0), (0, 1)$ を表す係数が整数であることを使い、 D が a, b, c, d をすべて割ることから $D = \pm 1$ に絞る。逆向きも、 $D = \pm 1$ なら係数を取り出すベクトルが整数成分になることから確認する。

【解答】

(1) 仮に $D = 0$ とする。このとき $ad - bc = 0$ であるから、 $\vec{m} = (a, c)$ と $\vec{n} = (b, d)$ は平行である。実際、 $a \neq 0$ なら $(b, d) = \frac{b}{a}(a, c)$ 、 $a = 0$ なら $c \neq 0$ かつ $b = 0$ なので $(b, d) = \frac{d}{c}(0, c)$ と書ける。

したがって、 $r\vec{m} + s\vec{n}$ で表されるベクトルはすべて $\vec{m}$ と平行な 1 本の直線上にある。例えば $(-c, a)$ は零ベクトルでなく、 $\vec{m}$ と垂直なので、その直線上にはない。よってすべての $\vec{q}$ に対して条件 I が成り立つことはない。したがって条件 I がすべての $\vec{q}$ に対して成り立つなら、 $D \neq 0$ である。

(2) $\vec{v} = (x, y)$ とおくと、条件

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

は $ax + cy = 1, \quad bx + dy = 0$ である。 $D = ad - bc \neq 0$ なので、これを解いて $\vec{v} = \left(\frac{d}{D}, -\frac{b}{D}\right)$ を得る。

同様に $\vec{w} = (X, Y)$ とおくと、 $aX + cY = 0, \quad bX + dY = 1$ であり、 $\vec{w} = \left(-\frac{c}{D}, \frac{a}{D}\right)$ となる。

(3) a, b, c, d は整数であるから、 $D = ad - bc$ も整数である。まず、すべての整数成分の $\vec{q}$ に対して条件 II が成り立つと仮定する。 $\vec{q} = (1, 0)$ のとき、(2) のベクトルを用いて係数を取り出すと

$$r = \vec{q} \cdot \vec{v} = \frac{d}{D}, \quad s = \vec{q} \cdot \vec{w} = -\frac{c}{D}$$

である。条件 II より、これらは整数でなければならない。 $\vec{q} = (0, 1)$ のときも同様に $r = -\frac{b}{D}, \quad s = \frac{a}{D}$ が整数である。

したがって $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}, \frac{c}{D}, \frac{d}{D}$ はいずれも整数である。

そこで $a = DA, \quad b = DB, \quad c = DC, \quad d = DE$ と書く。ただし A, B, C, E は整数である。すると $D = ad - bc = D^2(AE - BC)$ である。 $D \neq 0$ なので両辺を D で割って $1 = D(AE - BC)$ を得る。右辺の $AE - BC$ は整数だから、 D は 1 の約数である。よって $D = 1, -1$ である。

逆に $D = \pm 1$ とする。このとき (2) で求めた

$$\vec{v} = \left(\frac{d}{D}, -\frac{b}{D}\right), \quad \vec{w} = \left(-\frac{c}{D}, \frac{a}{D}\right)$$

はいずれも整数成分のベクトルである。整数成分の任意の $\vec{q}$ に対して

$$r = \vec{q} \cdot \vec{v}, \quad s = \vec{q} \cdot \vec{w}$$

とおけば、 r, s は整数であり、 $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ が成り立つ。したがって条件 II は成り立つ。

以上より、 D のとりうる値は 1, -1 である。

▶ 解法 2 (クラメル公式で整数条件を読む方法)

【方針】

$\vec{q} = (x, y)$ として成分の連立方程式を直接解き, $r = (dx - by)/D$, $s = (-cx + ay)/D$ を得る. 任意の整数 x, y で両係数が整数になる条件を, $(1, 0), (0, 1)$ を代入して調べる. これにより D が a, b, c, d をすべて割ることと $D = ad - bc$ を組み合わせる.

【解答】

(1) $D = 0$ なら $\vec{m}, \vec{n}$ は平行である. したがって両者の一次結合は 1 本の直線上にしかない. $\vec{q} = (-c, a)$ は零ベクトルでなく $\vec{m}$ に垂直だから, この $\vec{q}$ は表せない. よって条件 I がすべての $\vec{q}$ で成り立つなら

$$D \neq 0$$

である.

(2) $(d, -b)$ は $\vec{n}$ に垂直で, $\vec{m} \cdot (d, -b) = D$ である. 同様に $(-c, a)$ は $\vec{m}$ に垂直で, $\vec{n} \cdot (-c, a) = D$ である. よって

$$\vec{v} = \left(\frac{d}{D}, -\frac{b}{D} \right), \quad \vec{w} = \left(-\frac{c}{D}, \frac{a}{D} \right)$$

である.

(3) $\vec{q} = (x, y)$ とする. 成分で書けば

$$ar + bs = x, \quad cr + ds = y.$$

$D \neq 0$ なので

$$r = \frac{dx - by}{D}, \quad s = \frac{-cx + ay}{D}. \quad (1)$$

すべての整数 x, y に対して (1) が整数になるとする. $(x, y) = (1, 0), (0, 1)$ を代入すれば

$$\frac{d}{D}, -\frac{c}{D}, -\frac{b}{D}, \frac{a}{D}$$

はすべて整数である. したがって

$$a = DA, \quad b = DB, \quad c = DC, \quad d = DE$$

と整数 A, B, C, E を用いて書ける. これを $D = ad - bc$ へ代入すると

$$D = D^2(AE - BC).$$

$D \neq 0$ だから

$$1 = D(AE - BC),$$

よって $D = \pm 1$ である.

逆に $D = \pm 1$ なら, 任意の整数 x, y に対して (1) は整数であり, 条件 II を満たす. したがって

$$D = 1, -1$$

である.

【総評】 平面ベクトルの一次結合と整数格子を結びつける問題. 目安時間は 22~27 分. (1) は $D = 0$ なら平行であり, 平面全体を表せないという幾何的意味を書くといよい. (3) では「すべての整数格子点」を表せるという強い条件から, 特に基本ベクトル $(1, 0), (0, 1)$ の係数が整数になることを使う. 必要条件だけで終わらず, $D = \pm 1$ なら実際に十分であることまで確認するのが満点答案の形である. 双対ベクトルによる解法とクラメル公式による成分解法を分離した. 任意の整数格子点を表す条件から $D \mid a, b, c, d$ を導き, 必要十分性まで確認した.

【第 4 問】

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
 (B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
 (C) $f(0) \neq 0$
 (D) $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1$

(1) 条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。

以上のことから (2) $f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で,
 $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$ が成立することが示される。

(3) 上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ であることが、
 実部と虚部を調べることにによりわかる。ただし i は虚数単位である。

よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに, a, b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)' $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = a$, $g'(0) = b$

におきかえて, 条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも, 条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと, (4) 条件 (A), (B), (C), (D) において,
 $f(x)$ を $p(x)$ に, $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。

すると前半の議論により, $p(x)$, $q(x)$ がまず求まり, このことを用いると $f(x) = [\text{ア}]$, $g(x) = [\text{イ}]$ が得られる。

- (1) 下線部 (1) について, $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ となることを示せ。
 (2) 下線部 (2) について, $f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり, $f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。
 (3) 下線部 (3) について, 下線部 (1), 下線部 (2) の事実を用いることにより, $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。
 (4) 下線部 (4) について, 条件 (B), (D) において, $f(x)$ を $p(x)$ に, $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が,
 (B) すべての x, y について $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$
 (D) $p(x)$, $q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0) = 0$, $q'(0) = 1$
 を満たすことを示せ。また空欄 [ア], [イ] に入る関数を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

加法定理型の条件に、まず $x = y = 0$ を代入して初期値を決める。次に $f(x+h) - f(x)$ を条件 (A) で展開し、 $h \rightarrow 0$ の差分商から任意の x での微分可能性と $f'(x) = -g(x)$ を示す。(3) では同様に得られる $g'(x) = f(x)$ も使い、 $f \cos + g \sin$ と $g \cos - f \sin$ の 2 つの実関数が定数であることを示す。一般の a, b では指数因子と変数変換で p, q を標準形に直し、最後に $x = bt$ と戻す。

【解答】

(1) $F = f(0)$, $G = g(0)$ とおく。条件 (A) で $x = y = 0$ とすると $F = F^2 - G^2$ である。また条件 (B) で $x = y = 0$ とすると $G = 2FG$ である。

もし $G \neq 0$ なら、 $G = 2FG$ より $F = \frac{1}{2}$ である。これを $F = F^2 - G^2$ に代入すると $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - G^2$ となり、 $G^2 = -\frac{1}{4}$ を意味する。これは G が実数であることに反する。したがって $G = 0$ である。

すると $F = F^2$ であり、条件 (C) より $F \neq 0$ だから $F = 1$ である。よって $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ である。

(2) 任意の実数 x を固定し、 h を 0 に近づける。条件 (A) より $f(x+h) = f(x)f(h) - g(x)g(h)$ であるから、(1) の $f(0) = 1$ を用いて $f(x+h) - f(x) = f(x)\{f(h) - 1\} - g(x)g(h)$ となる。両辺を h で割ると $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h} - g(x)\frac{g(h) - g(0)}{h}$ である。

条件 (D) より f と g は 0 で微分可能で、 $f'(0) = 0$ 、 $g'(0) = 1$ である。したがって $h \rightarrow 0$ とすると右辺は $f(x) \cdot 0 - g(x) \cdot 1 = -g(x)$ に収束する。よって $f(x)$ は任意の x で微分可能であり、 $f'(x) = -g(x)$ が成り立つ。

(3) 同じように条件 (B) から $g(x+h) - g(x) = f(x)g(h) + g(x)\{f(h) - 1\}$ である。両辺を h で割って $h \rightarrow 0$ とすれば $g'(x) = f(x)$ を得る。

ここで $U(x) = f(x)\cos x + g(x)\sin x$, $V(x) = g(x)\cos x - f(x)\sin x$ とおく。 $f'(x) = -g(x)$ 、 $g'(x) = f(x)$ を用いると $U'(x) = f'(x)\cos x - f(x)\sin x + g'(x)\sin x + g(x)\cos x = 0$ であり、 $V'(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x - f'(x)\sin x - f(x)\cos x = 0$ である。したがって $U(x)$ 、 $V(x)$ はともに定数である。 $x = 0$ を代入すると、(1) より $U(0) = 1$, $V(0) = 0$ である。よってすべての x で $U(x) = 1$, $V(x) = 0$ である。ところが $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = U(x) + iV(x)$ であるから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$ が成り立つ。

(4)

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおく。まず条件 (B) を確認する。任意の x, y について、もとの条件 (B) より

$$g\left(\frac{x+y}{b}\right) = f\left(\frac{x}{b}\right)g\left(\frac{y}{b}\right) + g\left(\frac{x}{b}\right)f\left(\frac{y}{b}\right)$$

である。よって

$$\begin{aligned} q(x+y) &= e^{-\frac{a}{b}(x+y)} g\left(\frac{x+y}{b}\right) \\ &= e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{a}{b}y} g\left(\frac{y}{b}\right) + e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{a}{b}y} f\left(\frac{y}{b}\right) \\ &= p(x)q(y) + q(x)p(y) \end{aligned}$$

となる。

次に条件 (D) を確認する。一般の場合でも $f(0) = 1$ 、 $g(0) = 0$ であり、条件 (D)' より $f'(0) = a$ 、 $g'(0) = b$ である。したがって $p'(0) = -\frac{a}{b}f(0) + \frac{1}{b}f'(0) = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 0$ であり、 $q'(0) = -\frac{a}{b}g(0) + \frac{1}{b}g'(0) = 0 + 1 = 1$ である。よって p, q は条件 (D) を満たす。

なお、条件 (A) についても同じ計算で $p(x+y) = p(x)p(y) - q(x)q(y)$ が成り立ち、 $p(0) = 1 \neq 0$ であるから条件 (C) も満たす。したがって前半の結果を p, q に適用でき、 $p(x) = \cos x$, $q(x) = \sin x$ である。 $x = bt$ とおくと $p(bt) = e^{-at}f(t) = \cos bt$, $q(bt) = e^{-at}g(t) = \sin bt$ である。したがって $f(t) = e^{at}\cos bt$, $g(t) = e^{at}\sin bt$ を得る。変数名を x に戻せば、空欄は [ア] $e^{ax}\cos bx$, [イ] $e^{ax}\sin bx$ である。

▶ 解法 2 (複素関数にまとめる方法)

【方針】

$H(x) = f(x) + ig(x)$ とおくと、条件 (A), (B) は $H(x+y) = H(x)H(y)$ の 1 本にまとまる。原点の微分係数から任意点で $H'(x) = iH(x)$ を導き、 $H(x)(\cos x - i \sin x)$ の導関数が 0 であることを示す。一般の a, b でも $P(x) = p(x) + iq(x)$ を同様に扱う。

【解答】

$H(x) = f(x) + ig(x)$ とおく。条件 (A), (B) はまとめて

$$H(x+y) = H(x)H(y) \quad (1)$$

と表せる。

(1) (1) に $x = y = 0$ を代入すると $H(0) = H(0)^2$ である。条件 (C) より $H(0) \neq 0$ だから $H(0) = 1$ であり、

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0$$

を得る。

(2) $H'(0) = f'(0) + ig'(0) = i$ である。(1) より

$$\frac{H(x+h) - H(x)}{h} = H(x) \frac{H(h) - H(0)}{h}.$$

$h \rightarrow 0$ とすれば

$$H'(x) = iH(x).$$

実部を比較して $f'(x) = -g(x)$, 虚部を比較して $g'(x) = f(x)$ を得る。

(3)

$$K(x) = H(x)(\cos x - i \sin x)$$

とおく。 $(\cos x - i \sin x)' = -i(\cos x - i \sin x)$ だから

$$K'(x) = iH(x)(\cos x - i \sin x) - iH(x)(\cos x - i \sin x) = 0.$$

よって K は定数で、 $K(0) = 1$ より

$$\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$$

である。

(4) 一般の条件 (D)' では $H'(0) = a + ib$ である。問題文の p, q に対し

$$P(x) = p(x) + iq(x) = e^{-\frac{a}{b}x} H\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおく。(1) から

$$P(x+y) = P(x)P(y)$$

であり、その虚部を比較すれば条件 (B) を得る。また

$$P(0) = 1, \quad P'(0) = -\frac{a}{b}H(0) + \frac{1}{b}H'(0) = i$$

だから $p'(0) = 0$, $q'(0) = 1$ であり、条件 (D) も成り立つ。同様に実部から条件 (A), $P(0) = 1$ から条件 (C) も成り立つ。前半の結果により

$$P(x) = \cos x + i \sin x.$$

$x = bt$ とおくと

$$e^{-at}\{f(t) + ig(t)\} = \cos bt + i \sin bt$$

だから

$$f(x) = e^{ax} \cos bx, \quad g(x) = e^{ax} \sin bx$$

である。

【総評】 加法定理を満たす関数を、原点での微分条件から決定する証明問題。目安時間は 35～40 分。計算量よりも論理の順序が重要で、初期値、任意点での微分可能性、三角関数との比較、一般形への変換を分けて書くと崩れにくい。(2) では x を固定して $h \rightarrow 0$ とする差分商の形を明示すること、(4) では指数因子と x/b の変数変換が微分条件を標準形に直していることを確認するのが採点の中心である。問題文に沿って実部・虚部を別々に追う方法に加え、 $H = f + ig$ で加法定理と微分を 1 本にまとめる別証を示した。一般の a, b への変換も同じ枠組みで検算できる。

【第 5 問】

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2\sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線 C のうち $y \leq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

鉛直接線は媒介変数表示で $\frac{dx}{dt} = 0$ 、かつ $\frac{dy}{dt} \neq 0$ となる点を数える。(2) はまず $x - y = \sin t(2\sin t - 1)$ から、曲線が $y \leq x$ にある範囲を $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ と決める。面積は単なる縦幅積分ではなく、曲線と直線 $y = x$ でできる閉曲線の面積公式として

$$\int (x - y) \frac{dx}{dt} dt$$

を用い、端点で $x = y$ となることを使って評価する。

【解答】

(1) $x = t + 2\sin^2 t$, $y = t + \sin t$ であるから $\frac{dx}{dt} = 1 + 4\sin t \cos t = 1 + 2\sin 2t$ である。 y 軸と平行な接線をもつためには $\frac{dx}{dt} = 0$ が必要である。よって $1 + 2\sin 2t = 0$ すなわち $\sin 2t = -\frac{1}{2}$ を解く。 $0 < t < \pi$ より $0 < 2t < 2\pi$ なので、 $2t = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ である。したがって $t = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$ の 2 つが候補である。

また $\frac{dy}{dt} = 1 + \cos t$ であり、 $0 < t < \pi$ では $1 + \cos t \neq 0$ である。したがってこれら 2 点では実際に鉛直接線をもつ。よって、 y 軸と平行な接線は 2 本である。

(2) まず $x - y = 2\sin^2 t - \sin t = \sin t(2\sin t - 1)$ である。 $0 < t < \pi$ では $\sin t > 0$ だから、 $y \leq x$ 、すなわち $x - y \geq 0$ となるのは $\sin t \geq \frac{1}{2}$ のときである。したがって対象となる曲線部分は $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ である。この両端では $x = y$ となり、曲線は直線 $y = x$ と交わる。

曲線部分を $t = \frac{\pi}{6}$ から $t = \frac{5\pi}{6}$ まで進み、直線 $y = x$ 上を戻る閉曲線を考える。直線上では $y = x$ であるから、媒介変数表示の面積公式を用いると、求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (x - y) \frac{dx}{dt} dt$$

で与えられる。これは、直線部分の寄与を合わせると

$$\int x dx$$

が端点で打ち消されるためである。

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{\sin t(2\sin t - 1)\}(1 + 4\sin t \cos t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin^2 t - \sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8\sin^3 t \cos t - 4\sin^2 t \cos t) dt \end{aligned}$$

である。第 2 の積分は $\left[2\sin^4 t - \frac{4}{3}\sin^3 t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$ であり、両端で $\sin t = \frac{1}{2}$ なので 0 になる。

一方、 $2\sin^2 t - \sin t = 1 - \cos 2t - \sin t$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。よって求める面積は $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

▶ 解法 2 (座標を 45 度回転して面積を求める方法)

【方針】

直線 $y = x$ を新しい u 軸にするため $u = (x + y)/\sqrt{2}$, $v = (x - y)/\sqrt{2}$ とおく。対象部分では $v \geq 0$ で、面積は

$$\int v \, du$$

になる。端点で $x - y = 0$ なので、微分の全微分項が消え、計算は

$$\int (2\sin^2 t - \sin t) \, dt$$

に簡約される。

【解答】

(1)

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \cos t.$$

鉛直接線の条件は $dx/dt = 0$ である。 $0 < t < \pi$ で

$$\sin 2t = -\frac{1}{2}$$

を解くと

$$t = \frac{7\pi}{12}, \quad \frac{11\pi}{12}.$$

この範囲では $dy/dt = 1 + \cos t > 0$ だから、どちらも実際に鉛直接線を与える。よって

2本

である。

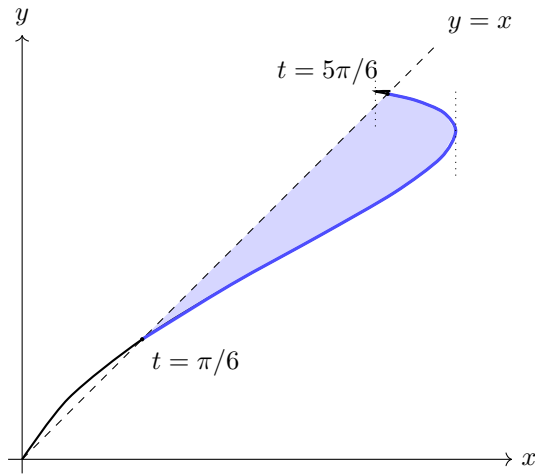
(2)

$$x - y = \sin t(2\sin t - 1)$$

であり、 $0 < t < \pi$ では $\sin t > 0$ だから、 $y \leq x$ となるのは

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$$

である。両端では $x = y$ となる。



座標を 45 度回転して

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

とおくと、直線 $y = x$ は $v = 0$ であり、求める面積は

$$S = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} v \frac{du}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (x-y)(x'+y') dt.$$

ここで

$$\frac{1}{2}(x-y)(x'+y') = (x-y)x' + \frac{1}{4} \frac{d}{dt}(x-y)^2.$$

両端で $x-y=0$ だから、全微分項の積分は 0 である。よって

$$S = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (x-y)x' dt.$$

$s = \sin t$ と略記すれば

$$(x-y)x' = (2s^2 - s)(1 + 4s \cos t).$$

第 2 項は

$$(2s^2 - s)4s \cos t = \frac{d}{dt} \left(2s^4 - \frac{4}{3}s^3 \right)$$

であり、両端で $s = 1/2$ なので積分すると 0 になる。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2 \sin^2 t - \sin t) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

【総評】 媒介変数表示の接線判定と面積公式を使う問題。目安時間は 22～27 分。(1) では $\frac{dx}{dt} = 0$ だけでなく $\frac{dy}{dt} \neq 0$ も確認する。(2) は $x-y$ の符号から対象区間を決めるところが第一関門で、さらに $\frac{dx}{dt}$ は区間内で符号変化するため、単なる縦方向の面積として雑に扱わず、直線 $y = x$ と合わせた閉曲線の面積公式として計算するのが安全である。通常の符号付き面積公式に加え、直線 $y = x$ が座標軸になるよう 45 度回転する方法を示した。曲線の折り返しがあっても閉曲線の面積として扱えることを完成図と全微分項で確認した。