

九州大学 2026 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標空間内で、原点 O を中心とする半径 3 の球を S とする。また、点 $P(1, 0, \sqrt{3})$ を考え、 T_1 と T_2 を直線 OP と直交する相異なる 2 つの平面とする。 T_1 と S の共通部分を C_1 、 T_2 と S の共通部分を C_2 とし、次の 2 つの条件をみたすとする。

- C_1 と C_2 はどちらも半径 1 の円である。
- C_1 の中心の z 座標は正で、 C_2 の中心の z 座標は負である。

以下の問いに答えよ。

- (1) 円 C_1 、 C_2 の中心の座標を求めよ。
- (2) 円 C_1 、 C_2 を底面とする円柱の側面を平面 $z = 0$ で切る。その切り口の曲線の方程式を求めよ。また、その曲線を図示せよ。

【方針】

平面が直線 OP に直交するため、球との断面円の中心は直線 OP 上にある。球の中心から断面円の中心までの距離は、球の半径 3 と断面円の半径 1 から三平方の定理で求める。(2) では 2 つの円を底面とする円柱の軸が直線 OP 、半径が 1 であることを使い、平面 $z = 0$ 上の点 $(x, y, 0)$ から軸までの距離が 1 である条件を式にする。最後に楕円の頂点を示して図示内容を明確にする。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{OP} = (1, 0, \sqrt{3}), \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1+3} = 2$$

である。平面 T_1, T_2 は直線 OP と直交しているので、球 S との共通部分である円 C_1, C_2 の中心は直線 OP 上にある。

球 S の半径は 3 であり、断面円の半径は 1 である。球の中心 O から断面円の中心までの距離を d とすると、直角三角形より $d^2 + 1^2 = 3^2$ だから $d = 2\sqrt{2}$ である。直線 OP の単位方向ベクトルは $\frac{1}{2}(1, 0, \sqrt{3})$ であるから、円の中心の候補は $\pm 2\sqrt{2} \cdot \frac{(1, 0, \sqrt{3})}{2} = \pm(\sqrt{2}, 0, \sqrt{6})$ である。 C_1 の中心の z 座標は正、 C_2 の中心の z 座標は負なので、

$$C_1 \text{ の中心 } (\sqrt{2}, 0, \sqrt{6}), \quad C_2 \text{ の中心 } (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{6})$$

である。

(2) 2 つの円 C_1, C_2 を底面とする円柱は、軸が直線 OP 、半径が 1 の円柱である。平面 $z = 0$ 上の点を $X = (x, y, 0)$ とする。点 X から直線 OP までの距離が 1 であることが、切り口の条件である。

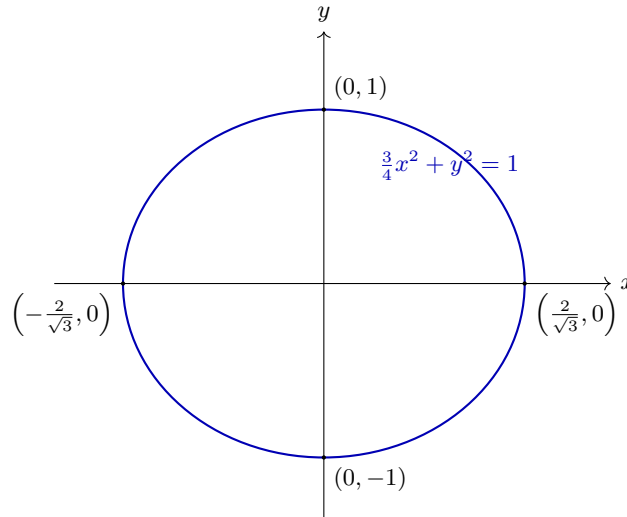
直線 OP の方向ベクトルを $v = (1, 0, \sqrt{3})$ とおくと、 $|v|^2 = 4$ である。点 X の位置ベクトルを同じく $X = (x, y, 0)$ と書けば、 X のうち軸方向成分の長さの 2 乗は $\frac{(X \cdot v)^2}{|v|^2} = \frac{x^2}{4}$ である。したがって、軸からの距離の 2 乗は

$$|X|^2 - \frac{(X \cdot v)^2}{|v|^2} = x^2 + y^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 + y^2$$

である。これが 1 に等しいので、切り口の曲線は $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$ である。

これは平面 $z = 0$ 上の楕円であり、 $\frac{x^2}{4/3} + y^2 = 1$ と書ける。したがって x 軸方向の半径は $2/\sqrt{3}$ 、 y 軸方向の半径は 1 である。図示すると、中心は原点、頂点は $(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$ 、 $(0, \pm 1)$ で、 x 軸方向に少し長い楕円である。

実際の切り口は次の楕円である。



【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 18 分程度。(1) は断面円の中心が球の中心から平面へ下ろした垂線の足, すなわち軸 OP 上にあることを使い, $d^2 + 1^2 = 3^2$ から中心までの距離 $2\sqrt{2}$ を得る。(2) は円柱側面を「軸からの距離が 1 の点」と見て, 平面 $z = 0$ 上で $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$ を導く。図示では中心, 4 頂点, 長軸・短軸を実図に反映した。有限な円柱側面である点についても, 楕円上の各点の軸への射影が 2 底面の間に入るため切り口全体が有効である。典型的な失点は $|OP| = 2$ による射影の分母 4 を落とすことである。

【第 2 問】

点 z が複素数平面上の線分

$$z = t + ti \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

の上を動くとき,

$$z^2 - wz + 1 = 0$$

をみたす複素数 w を表す点が描く軌跡を C とする。ただし, i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) 軌跡 C を複素数平面上に図示せよ。

(2) $t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_1 とし, $t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_2 とする。このとき, 軌跡 C , 線分 OP_1 , 線分 OP_2 で囲まれる領域を虚軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし, O は複素数平面の原点である。

【方針】

方程式を $w = z + 1/z$ と変形し, $z = t(1+i)$ を代入して $w = X + Yi$ の実部と虚部を t で表す。 $X + Y = 2t$, $X - Y = 1/t$ から $X^2 - Y^2 = 2$ が出るので, 端点 P_1, P_2 を計算して双曲線の右枝の一部として図示する。(2) は虚軸回転なので, Y を高さとして外半径を双曲線側 $\sqrt{Y^2 + 2}$, 内半径を線分側 $\sqrt{3}|Y|$ とするワッシャー法で体積を求める。

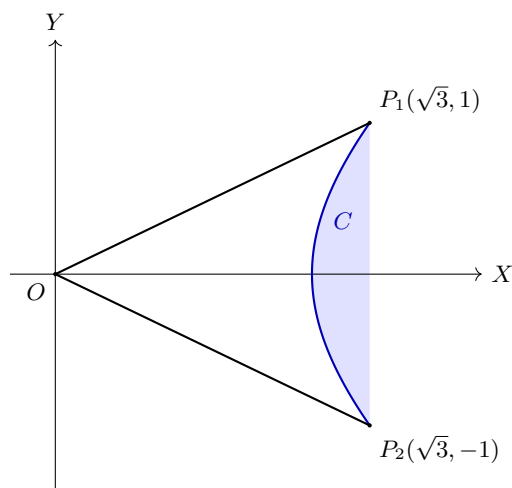
【解答】

(1) 与えられた方程式 $z^2 - wz + 1 = 0$ について, 問題の範囲では $t > 0$ なので $z = t + ti \neq 0$ である。したがって両辺を z で割って $w = z + \frac{1}{z}$ を得る。ここで $z = t(1+i)$ だから $\frac{1}{z} = \frac{1}{t(1+i)} = \frac{1-i}{2t}$ である。 $w = X + Yi$ とおくと $X = t + \frac{1}{2t}$, $Y = t - \frac{1}{2t}$ である。よって $X + Y = 2t$, $X - Y = \frac{1}{t}$ となり, これらを掛けて $X^2 - Y^2 = 2$ を得る。

次に端点を求める。 $t = (1 + \sqrt{3})/2$ のとき $2t = 1 + \sqrt{3}$, $\frac{1}{t} = \sqrt{3} - 1$ であるから $X = \frac{(X+Y) + (X-Y)}{2} = \sqrt{3}$, $Y = \frac{(X+Y) - (X-Y)}{2} = 1$ である。したがって $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$ である。また, $t = (-1 + \sqrt{3})/2$ のとき $2t = \sqrt{3} - 1$, $\frac{1}{t} = \sqrt{3} + 1$ より $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ である。

さらに $t > 0$ なので $X + Y = 2t > 0$, $X - Y = 1/t > 0$ であり, 特に $X > 0$ である。したがって軌跡 C は, 双曲線 $X^2 - Y^2 = 2$ の右側の枝のうち, 端点 $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ から $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$ までの部分である。すなわち $X = \sqrt{Y^2 + 2}$, $-1 \leq Y \leq 1$ と表される曲線である。図示では, 右に開く双曲線の枝を $Y = -1$ から $Y = 1$ まで切り取った弧として描けばよい。

軌跡と 2 本の線分は次のようになる。網掛け部分が (2) で回転させる領域である。



(2) 求める領域は、 $-1 \leq Y \leq 1$ において、右側が双曲線 $X = \sqrt{Y^2 + 2}$ である。左側の境界は線分 OP_1 と線分 OP_2 である。 $0 \leq Y \leq 1$ では線分 OP_1 上にあり、その式は $X = \sqrt{3}Y$ である。 $-1 \leq Y \leq 0$ では線分 OP_2 上にあり、その式は $X = -\sqrt{3}Y$ である。したがってまとめて $X = \sqrt{3}|Y|$ と書ける。

この領域を虚軸，すなわち Y 軸のまわりに 1 回転する。高さ Y の断面は、外半径 $R(Y) = \sqrt{Y^2 + 2}$ 内半径 $r(Y) = \sqrt{3}|Y|$ の円環である。したがって体積は

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 \{R(Y)^2 - r(Y)^2\} dY \\
 &= \pi \int_{-1}^1 \{(Y^2 + 2) - 3Y^2\} dY \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (2 - 2Y^2) dY \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 (1 - Y^2) dY \\
 &= 2\pi \left[Y - \frac{Y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{8\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

【総評】 難度 6，計算量 5。想定時間は 25 分程度。 $w = z + 1/z$ として実部・虚部を X, Y とおけば， $X + Y = 2t$ ， $X - Y = 1/t$ から $X^2 - Y^2 = 2$ が得られる。 $t > 0$ と両端の値により，右枝のうち $-1 \leq Y \leq 1$ の弧であることを図に反映する。(2) の内側境界は 2 線分を合わせて $X = \sqrt{3}|Y|$ ，外側は $X = \sqrt{Y^2 + 2}$ であり，虚軸回転後の断面は円板ではなく円環である。典型的な失点は内半径を引かないこと，または P_1, P_2 の Y 座標の符号を逆にすることである。

【第 3 問】

$0 < r < 1$ とする。表が出る確率が r 、裏が出る確率が $1 - r$ の硬貨を投げ、表が出た場合は白玉を 2 つ横並びに置き、裏が出た場合は黒玉を 1 つ置く。この要領で硬貨を繰り返し投げ、左から右に 1 列になるように白玉と黒玉を順に並べていく。

例えば、3 回硬貨を投げ、結果が順に「裏、表、表」であれば、左から順に「黒、白、白、白、白」と 5 つの玉が並ぶ。 n を自然数とする。 $n + 2$ 回硬貨を投げたとき、左から $n, n + 1, n + 2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。 $n + 2$ 回硬貨を投げたとき、左から $1, n, n + 1, n + 2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_{n-1} を用いて表せ。
- (3) $n \geq 3$ のとき、 p_n を p_{n-2}, p_{n-1} を用いて表せ。
- (4) p_n を求めよ。

【方針】

裏の確率を $q = 1 - r$ とおく。玉の列では、裏なら位置が 1 つ進み、表なら白玉 2 つで位置が 2 つ進む。先頭の投げ方で場合分けし、目標の位置番号が残りの列で何番目にずれるかを追跡する。(2) は 1 番目も黒であるため先頭が裏に固定され、 p_{n-1} に帰着する。(3) は先頭が裏なら p_{n-1} 、先頭が表なら 2 個分ずれるので p_{n-2} に帰着する。最後は $p_n = qp_{n-1} + rp_{n-2}$ を初期値 p_1, p_2 で解く。

【解答】

以下では、裏が出る確率を $q = 1 - r$ とおく。裏が出ると黒玉が 1 つ置かれ、表が出ると白玉が 2 つ置かれることに注意する。

(1) p_1 は、 $1 + 2 = 3$ 回硬貨を投げたとき、左から 1, 2, 3 番目の玉がすべて黒である確率である。1 番目の玉が黒であるためには 1 回目が裏でなければならず、さらに 2 番目、3 番目の玉も黒にするには 2 回目、3 回目も裏でなければならない。したがって $p_1 = q^3$ である。 p_2 は、4 回硬貨を投げたとき、左から 2, 3, 4 番目の玉がすべて黒である確率である。1 回目が表なら、最初に白玉が 2 つ並ぶので 2 番目の玉は白となり不可能である。よって 1 回目は裏でなければならない。このとき、残り 3 回で左から 1, 2, 3 番目に相当する玉がすべて黒である必要があるため、残り 3 回もすべて裏である。したがって $p_2 = q^4$ である。すなわち $p_1 = (1 - r)^3$, $p_2 = (1 - r)^4$ である。

(2) $n \geq 2$ とする。左から 1 番目の玉が黒であるためには、1 回目が裏でなければならない。この確率は q である。1 回目に黒玉が 1 つ置かれたあとは、残り $n + 1$ 回の投げでできる列において、もとの左から $n, n + 1, n + 2$ 番目の玉は、残りの列の左から $n - 1, n, n + 1$ 番目に対応する。したがって、残り $n + 1 = (n - 1) + 2$ 回について定義される p_{n-1} がその確率である。よって求める確率は $qp_{n-1} = (1 - r)p_{n-1}$ である。

(3) $n \geq 3$ とする。 p_n を、1 回目の硬貨の結果で分けて考える。

1 回目が裏である場合、先頭に黒玉が 1 つ置かれる。このとき、左から $n, n + 1, n + 2$ 番目の玉がすべて黒であるためには、残り $n + 1$ 回でできる列の左から $n - 1, n, n + 1$ 番目の玉がすべて黒であればよい。これは p_{n-1} の事象であるから、この場合の確率は qp_{n-1} である。

1 回目が表である場合、先頭に白玉が 2 つ置かれる。このとき、目標の $n, n + 1, n + 2$ 番目の玉は、残りの列の左から $n - 2, n - 1, n$ 番目に対応する。残りの投げは $n + 1$ 回あるが、最初の n 回だけで列の長さは少なくとも n になるので、残りの最後の 1 回はこれら $n - 2, n - 1, n$ 番目の玉には影響しない。したがってこの確率は p_{n-2} であり、1 回目が表である確率 r を掛けて rp_{n-2} である。

以上より $p_n = (1 - r)p_{n-1} + rp_{n-2}$ ($n \geq 3$) である。

(4) $q = 1 - r$ として、(3) の漸化式は $p_n = qp_{n-1} + rp_{n-2}$ である。特性方程式は $\lambda^2 - q\lambda - r = 0$ であり、 $q = 1 - r$ を用いると $\lambda^2 - (1 - r)\lambda - r = 0$ すなわち $(\lambda - 1)(\lambda + r) = 0$ である。よって $p_n = A + B(-r)^n$ と表せる。

初期値 $p_1 = q^3$, $p_2 = q^4$ を代入すると $A - rB = q^3$, $A + r^2B = q^4$ である。第 2 式から第 1 式を引くと $r(1 + r)B = q^4 - q^3 = q^3(q - 1) = -rq^3$ である。 $0 < r < 1$ なので $r(1 + r) \neq 0$ であり、 $B = -\frac{q^3}{1 + r}$ を得る。

また $A = q^3 + rB = q^3 - \frac{rq^3}{1 + r} = \frac{q^3}{1 + r}$ である。したがって $p_n = \frac{q^3}{1 + r}\{1 - (-r)^n\}$ であり、 $q = 1 - r$ に戻して $p_n = \frac{(1 - r)^3}{1 + r}\{1 - (-r)^n\}$ である。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 想定時間は 30 分程度。表なら位置が 2 つ, 裏なら 1 つ進むため, 投げた回数と玉の位置番号を分けて管理することが中心である。(2) は先頭の玉も黒と指定されるので, 1 回目裏に固定され $(1-r)p_{n-1}$ となる。(3) は先頭が裏なら 1 個, 表なら 2 個ずれる。表の場合に残る最後の 1 投が目標位置へ影響しない理由まで書くと漸化式の対応が明確になる。特性方程式の根は $1, -r$ で, 初期値 $p_1 = (1-r)^3, p_2 = (1-r)^4$ から定数を決める。全列挙でも複数の r に対し $n = 1$ から 7 まで一般式と一致することを確認済みである。

【第 4 問】

以下の問いに答えよ。ただし, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ が無理数であることは用いてよい。

- (1) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ を示せ。また $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数であることを示せ。
- (2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 4 次方程式を 1 つ求めよ。また, その 4 次方程式の解をすべて求めよ。
- (3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しないことを示せ。

【方針】

(1) は両辺が正であることを確認してから 2 乗し, 無理数性は有理数と仮定して 2 乗した値が無理数になる矛盾を使う。(2) は $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とおき, $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ から $(x^2 - 5)^2 = 24$ を作る。全解は $x^2 = 5 \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2$ から求める。(3) は有理係数 2 次方程式があると仮定し, $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ を使って $x = a + b\sqrt{6}$ と表せることを導き, 平方して有理数の 2 乗が 2 または 3 になる矛盾を出す。

【解答】

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は正である。また $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$ である。したがって, 正の平方根をとって $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ である。

次に, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が有理数であると仮定する。このとき, その 2 乗も有理数である。しかし $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ であり, $\sqrt{6}$ は無理数なので $5 + 2\sqrt{6}$ も無理数である。これは矛盾である。よって $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数であることが示された。

(2) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とおく。(1) の計算より $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ であるから $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ である。両辺を 2 乗して $(x^2 - 5)^2 = 24$ を得る。展開すると $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$ すなわち $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ である。これは $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 4 次方程式の 1 つである。

この方程式の解をすべて求める。 $X = x^2$ とおくと $X^2 - 10X + 1 = 0$ である。したがって $X = 5 \pm 2\sqrt{6}$ である。ここで $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$, $5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ である。よって 4 次方程式の解は $x = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $x = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ である。

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 2 次方程式が存在すると仮定する。最高次の係数で割れば, ある有理数 p, q によって $x^2 + px + q = 0$ と書ける。ただし $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ である。

もし $p = 0$ なら $x^2 = -q$ となり, x^2 は有理数である。しかし $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ は無理数であるから矛盾する。したがって $p \neq 0$ である。

このとき $x = -\frac{x^2 + q}{p} = -\frac{5 + q}{p} - \frac{2}{p}\sqrt{6}$ である。よって, ある有理数 a, b を用いて $x = a + b\sqrt{6}$ と表せる。すなわち $\sqrt{2} + \sqrt{3} = a + b\sqrt{6}$ である。両辺を 2 乗すると $5 + 2\sqrt{6} = a^2 + 6b^2 + 2ab\sqrt{6}$ となる。左辺と右辺の有理数部分と $\sqrt{6}$ の係数を比べて $a^2 + 6b^2 = 5$, $2ab = 2$ すなわち $a^2 + 6b^2 = 5$, $ab = 1$ を得る。 $ab = 1$ より $a \neq 0$ であり, $b = 1/a$ である。これを代入して $a^2 + \frac{6}{a^2} = 5$ となる。 $u = a^2$ とおくと $u^2 - 5u + 6 = 0$ であるから $u = 2$ または $u = 3$ である。すなわち $a^2 = 2$ または $a^2 = 3$ である。しかし a は有理数なので, これは $\sqrt{2}$ または $\sqrt{3}$ が有理数であることを意味し, 問題で用いてよい無理数性に反する。

したがって, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しない。

【総評】 難度 5, 計算量 5. 想定時間は 22 分程度。(1) は両辺が正であることを確認してから 2 乗し, 無理数性は平方 $5 + 2\sqrt{6}$ との矛盾で示す。(2) は $(x^2 - 5)^2 = 24$ から $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ を作り, $x^2 = 5 \pm 2\sqrt{6}$ の双方から 4 解を漏れなく出す。(3) は 4 次方程式が見つかった事実だけでは不十分で, 有理係数 2 次方程式の存在を仮定して矛盾を導く。 $p = 0$ を先に除き, $x = a + b\sqrt{6}$ と表した後, 有理数部分と $\sqrt{6}$ の係数を比較する根拠は $\sqrt{6}$ の無理数性である。典型的な失点は 2 乗で得た 4 次方程式の解を $\pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ だけにすることである。

【第 5 問】

関数

$$f(x) = \int_x^{x+1} \log(4t^2 + 1) dt$$

に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が極値をとるときの x の値を求めよ。また、そのときの極値を求めよ。
 (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x\{f(x) - f(x-1)\}$ を求めよ。

【方針】

積分区間が $[x, x+1]$ と動くので、 $g(t) = \log(4t^2 + 1)$ とおき、 $f'(x) = g(x+1) - g(x)$ を使う。極値の位置と符号変化を確認し、極小値は偶関数性、部分積分、 $u = 2t$, $u = \tan \theta$ で計算する。(2) は 2 つの積分を同じ $[0, 1]$ 上にそろえ、さらに微分積分学の基本定理で二重積分にする。 $xg'(x+c) \rightarrow 2$ が $-1 \leq c \leq 1$ で一様に成り立つことを具体的に評価する。

【解答】

(1) $g(t) = \log(4t^2 + 1)$ とおくと

$$f(x) = \int_x^{x+1} g(t) dt$$

である。積分区間の両端が x によって動くので、 $f'(x) = g(x+1) - g(x)$ である。したがって $f'(x) = \log(4(x+1)^2 + 1) - \log(4x^2 + 1) = \log \frac{4(x+1)^2 + 1}{4x^2 + 1}$ である。 $f'(x) = 0$ となるのは $4(x+1)^2 + 1 = 4x^2 + 1$ のときであり、整理して $8x + 4 = 0$ より $x = -\frac{1}{2}$ である。また、 $4(x+1)^2 + 1 < 4x^2 + 1$ は $(x+1)^2 < x^2$ すなわち $x < -\frac{1}{2}$ と同値である。よって $x < -1/2$ で $f'(x) < 0$, $x > -1/2$ で $f'(x) > 0$ となる。したがって $x = -1/2$ で極小となる。

極小値を求める。

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} \log(4t^2 + 1) dt$$

である。被積分関数は偶関数なので

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{1/2} \log(4t^2 + 1) dt$$

である。ここで部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \log(4t^2 + 1) dt &= [t \log(4t^2 + 1)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t \cdot \frac{8t}{4t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \int_0^{1/2} \frac{8t^2}{4t^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

さらに $\frac{8t^2}{4t^2 + 1} = 2 - \frac{2}{4t^2 + 1}$ だから

$$\int_0^{1/2} \log(4t^2 + 1) dt = \frac{1}{2} \log 2 - 1 + \int_0^{1/2} \frac{2}{4t^2 + 1} dt$$

である。最後の積分で $u = 2t$ とおくと

$$\int_0^{1/2} \frac{2}{4t^2 + 1} dt = \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du$$

である。さらに $u = \tan \theta$ とおくと、 $u = 0$ で $\theta = 0$, $u = 1$ で $\theta = \pi/4$ だから

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du = \int_0^{\pi/4} 1 d\theta = \frac{\pi}{4}$$

である。よって

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \left(\frac{1}{2} \log 2 - 1 + \frac{\pi}{4} \right) = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

である。したがって $x = -\frac{1}{2}$ で極小値 $\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ であり、極大値は存在しない。

(2) $g(t) = \log(4t^2 + 1)$ とおく。積分区間を $[0, 1]$ にそろえると

$$f(x) - f(x-1) = \int_0^1 \{g(x+u) - g(x-1+u)\} du.$$

さらに微分積分学の基本定理より

$$g(x+u) - g(x-1+u) = \int_0^1 g'(x-1+u+v) dv$$

である。したがって

$$x\{f(x) - f(x-1)\} = \int_0^1 \int_0^1 xg'(x-1+u+v) dv du.$$

ここで

$$g'(s) = \frac{8s}{4s^2 + 1}.$$

$c = -1 + u + v$ とおけば $-1 \leq c \leq 1$ であり、 $x > 2$ のとき

$$\begin{aligned} |xg'(x+c) - 2| &= \left| \frac{8x(x+c)}{4(x+c)^2 + 1} - 2 \right| \\ &= \frac{|8c(x+c) + 2|}{4(x+c)^2 + 1} \\ &\leq \frac{8x + 10}{4(x-1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

右辺は $x \rightarrow \infty$ で 0 に収束し、 $c \in [-1, 1]$ に依存しない。よって $xg'(x+c) \rightarrow 2$ はこの区間で一様である。上の二重積分との差を直接評価すると

$$\begin{aligned} |x\{f(x) - f(x-1)\} - 2| &\leq \int_0^1 \int_0^1 |xg'(x-1+u+v) - 2| dv du \\ &\leq \frac{8x + 10}{4(x-1)^2 + 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\{f(x) - f(x-1)\} = 2.$$

【総評】 難度 6，計算量 6。想定時間は 28 分程度。動く区間の積分では $f'(x) = g(x+1) - g(x)$ とし、 $x = -1/2$ の前後の符号から極小であることを示す。極小値は偶関数性と部分積分で $\log 2 - 2 + \pi/2$ となる。(2) では点ごとの極限をそのまま積分の中へ入れるのは不十分である。二重積分表示に直し、 $c \in [-1, 1]$ に対する誤差を $(8x+10)/(4(x-1)^2+1)$ で一様に抑えれば、極限值 2 が厳密に従う。典型的な失点は部分積分後の係数 2 と、 $u = \tan \theta$ の置換範囲 $[0, \pi/4]$ の取り違いである。