

名古屋大学 1988 年度 文系

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

A, B は $A^2 - 2AB + B^2 = O$ を満たす 2 次の正方行列とする. ただし, O は零行列, A, B の各成分は実数とする. このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = O$

(2) $A = A', B = B'$ ならば, $A = B$ である.

ただし, A' は A の行と列とを入れ換えた行列, B' は B の行と列とを入れ換えた行列である. すなわち,
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である.

▶ 解法 1：与式を左右から掛けて差を取る

【方針】

与式を $Q = A^2 - 2AB + B^2$ と置く. (1) の 3 次式は、積の順序を変えずに $AQ - QB$ として一度に作れる。(2) では与式を転置した式と比較して $AB = BA$ を示すと、条件が $(A - B)^2 = O$ になる。最後は $A - B$ が実対称行列であることを成分に戻して結論する。

【解答】

(1)

$$Q = A^2 - 2AB + B^2$$

とおく。仮定は $Q = O$ である。積の順序を保ったまま、左から A を掛けた式と右から B を掛けた式を作ると

$$AQ = A^3 - 2A^2B + AB^2 = O,$$

$$QB = A^2B - 2AB^2 + B^3 = O$$

である。第 1 式から第 2 式を引けば

$$AQ - QB = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = O$$

となり、示す式を得る。

(2)

$A = A', B = B'$ とする。与式を転置すると、積の順序が逆になるので

$$A^2 - 2BA + B^2 = O$$

である。これと元の式との差を取ると

$$AB = BA$$

を得る。したがって

$$O = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = (A - B)^2$$

である。

$$C = A - B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$$

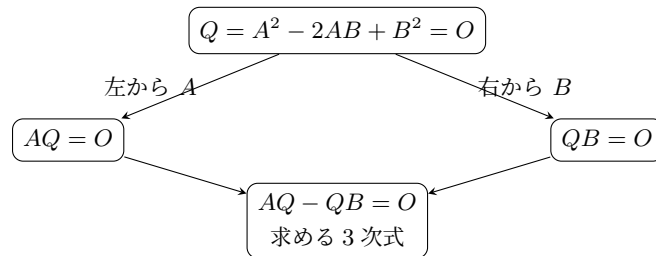
とおく。 $C^2 = O$ の左上成分と右下成分から

$$u^2 + v^2 = 0, \quad v^2 + w^2 = 0$$

である。各成分は実数なので $u = v = w = 0$ 。ゆえに $C = O$ 、すなわち

$$A = B$$

である。



▶ 解法 2：差を置いて交換子を消す

【方針】

$C = A - B$ と置いて $A = B + C$ とする。条件を $C^2 = CB - BC$ に直し、(1) は非可換な積を順序どおり展開して、この関係だけで消去する。(2) では C^2 は転置して変わらない一方、 $CB - BC$ は転置で符号が変わることを利用する。

【解答】

(1)

$$C = A - B, \quad A = B + C$$

とおく。条件式へ代入して積の順序を保って展開すると

$$\begin{aligned}
 O &= (B + C)^2 - 2(B + C)B + B^2 \\
 &= BC - CB + C^2
 \end{aligned}$$

であるから

$$C^2 = CB - BC. \quad (*)$$

求める 3 次式を B, C で展開すると

$$\begin{aligned}
 A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \\
 = B^2C - 2BCB + BC^2 + CB^2 + CBC - 2C^2B + C^3.
 \end{aligned}$$

(*) から

$$BC^2 = BCB - B^2C, \quad C^2B = CB^2 - BCB$$

であり、さらに

$$C^3 = C(CB - BC) = C^2B - CBC = CB^2 - BCB - CBC.$$

これらを代入すると、すべての項が打ち消し合って O となる。

(2)

A, B がともに転置して変わらないなら $C = C'$ である。よって C^2 も転置して変わらない。一方

$$(CB - BC)' = BC - CB = -(CB - BC)$$

である。(*) の両辺を転置した式と元の式を比べると

$$C^2 = -C^2$$

だから $C^2 = O$ である。

$$C = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$$

と書けば、 $C^2 = O$ の対角成分は

$$u^2 + v^2 = 0, \quad v^2 + w^2 = 0.$$

したがって $u = v = w = 0$ であり、 $A - B = C = O$ 。ゆえに $A = B$ である。

【総評】 難度は 10 段階で 7、計算量は 10 段階で 5 程度。試験場では 25～30 分が目安である。(1) は二項定理を使う問題ではなく、与式を Q として $AQ - QB$ を作る問題である。行列の積を勝手に交換しないことが最大の採点点になる。(2) は転置によって積の順序が逆になることを明記し、 $AB = BA$ を得てから $(A - B)^2 = O$ とする。実対称な 2 次行列の成分まで書けば、「2 乗が零だから元も零」という飛躍を避けられる。

【第 2 問】

1 辺の長さ 1, $\angle A = \angle C = 120^\circ$ のひし形 $ABCD$ がある. a, b を $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < b \leq 1$ の数とし, ひし形 $ABCD$ に含まれる次の 4 つのおうぎ形 P_1, P_2, P_3, P_4 を考える. それらは中心 A , 半径 a , 中心角 120° のおうぎ形 P_1 , 中心 C , 半径 a , 中心角 120° のおうぎ形 P_2 , 中心 B , 半径 b , 中心角 60° のおうぎ形 P_3 , 中心 D , 半径 b , 中心角 60° のおうぎ形 P_4 である. $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ がひし形 $ABCD$ と一致するもののうち, これら 4 つのおうぎ形の面積の和が最小となる a, b の値を求めよ.

▶ 解法 1: 覆われない部分の最遠点を調べる

【方針】

対角線の交点を O とし, 対称性によって三角形 OCB だけを考える. この三角形では, 中心 A, D より中心 C, B の方が近いので, 半径 a の C の円と半径 b の B の円で覆う条件になる. C の円の外側で B から最も遠い点を, $a \leq 1/2$ と $a \geq 1/2$ に分けて求め, $2a^2 + b^2$ を最小化する. 最後に等号候補が実際に全体を覆うことまで確認する.

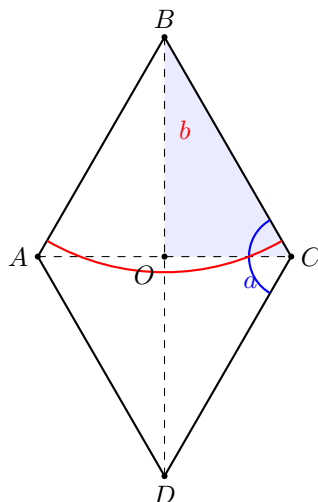
【解答】

ひし形を

$$A = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \quad C = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad D = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

と置き, 対角線の交点を $O = (0, 0)$ とする.

第 1 象限の三角形 OCB にある点は, A より C に近く, D より B に近い. したがって, ひし形全体が覆われることは, 三角形 OCB が中心 C , 半径 a の円の内部と, 中心 B , 半径 b の円の内部との和で覆われることと同値である.



4 つのおうぎ形の面積の和は

$$2 \cdot \frac{120}{360} \pi a^2 + 2 \cdot \frac{60}{360} \pi b^2 = \frac{\pi}{3} (2a^2 + b^2).$$

よって $2a^2 + b^2$ を最小にすればよい.

$0 < a \leq 1/2$ の場合.

辺 OC 上で $CX = a$ となる点を X とする. C の円で覆われない部分を B の円が覆うには, 少なくとも $BX \leq b$ が必要である. 直角三角形の座標から

$$BX^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \frac{3}{4} = a^2 - a + 1.$$

したがって

$$\begin{aligned} 2a^2 + b^2 &\geq 3a^2 - a + 1 \\ &= 3 \left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

この条件が辺だけでなく三角形全体に対して十分な下限を与えることも確認する。 C からの距離が a である円弧上の点を

$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{a^2 - y^2}, y\right)$$

と書く。この点と B との距離の 2 乗は

$$1 + a^2 - \sqrt{a^2 - y^2} - \sqrt{3}y.$$

該当する円弧では $0 \leq y \leq \sqrt{3}a/2$ である。関数

$$\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{3}y$$

はこの区間で上に凸なので最小値は端点で取り、その値は a である。したがって、 C の円の外側で B から最も遠い点は X であり、必要な半径は

$$b^2 \geq a^2 - a + 1$$

である。

$1/2 \leq a \leq \sqrt{3}/2$ の場合。

C の円と辺 OB の交点の高さを

$$y_0 = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$$

とする。同じ円弧上の比較から、 C の円の外側で B から最も遠い点は $(0, y_0)$ である。よって

$$b \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}.$$

$u = \sqrt{a^2 - 1/4}$ と置けば

$$\begin{aligned} 2a^2 + b^2 &\geq 2a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - u\right)^2 \\ &= 3u^2 - \sqrt{3}u + \frac{5}{4} \\ &= 3\left(u - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 1 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

これは $11/12$ より大きい。

以上より、全範囲での下限は $11/12$ であり、等号が可能なのは

$$a = \frac{1}{6}, \quad b^2 = \frac{31}{36}$$

のときである。すなわち

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{\sqrt{31}}{6}.$$

上で示した最遠点の評価により、この半径の 2 円は三角形 OCB を実際に覆う。対称性からひし形全体も 4 つのおうぎ形で覆われる。

▶ 解法 2：水平断面で必要十分性を確認する

【方針】

第 1 象限の三角形を高さ y の水平線で切る。右端側を中心 C の円、左端側を中心 B の円で覆うと考え、2 つの円が各断面上で途切れず重なる条件を求める。 $a < 1/2$ では最も厳しい断面が底辺 OC 、 $a \geq 1/2$ では中心 C の円が辺 OB と交わる高さになる。これを面積式へ代入して平方完成する。

【解答】

対称性により、三角形

$$T = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}} \right\}$$

を、中心 $C = (1/2, 0)$ 、半径 a の円と、中心 $B = (0, \sqrt{3}/2)$ 、半径 b の円で覆えばよい。

高さ y の断面で、中心 C の円が届く左端は

$$x_C(y) = \frac{1}{2} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

である。一方、中心 B の円が届く右端は

$$x_B(y) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2}.$$

断面に隙間がないためには $x_B(y) \geq x_C(y)$ が必要である。

$0 < a \leq 1/2$ では、 $y = 0$ の断面が

$$\sqrt{b^2 - \frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2} - a$$

を与える。すなわち

$$b^2 \geq a^2 - a + 1. \quad (1)$$

実はこれで全断面が覆われる。 $0 \leq y \leq \sqrt{3}a/2$ では

$$\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{3}y \geq a$$

であるため、(1) から $x_B(y) \geq x_C(y)$ が従う。それより高い断面では、右端 BC まで中心 B の円が届く。

したがって

$$2a^2 + b^2 \geq 3a^2 - a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}.$$

一方 $a \geq 1/2$ では、中心 C の円は辺 OB と高さ

$$y_0 = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$$

で交わる。この断面の左端 $(0, y_0)$ を中心 B の円が覆う必要があるから

$$b \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - y_0.$$

$u = y_0$ と置くと

$$2a^2 + b^2 \geq 3\left(u - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 1 \geq 1.$$

よって小さい方の下限は $11/12$ 。等号は

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

で成立する。断面の重なりも上で確認済みなので、これが求める値である。

【総評】 難度は 10 段階で 8、計算量は 10 段階で 7 程度。試験場では 35～40 分を見込む。面積式だけを最小化しても、4 つのおうぎ形がひし形を覆う条件を処理したことにはならない。対称性で三角形 OCB に絞り、 $a \leq 1/2$ と $a \geq 1/2$ を分けるのが重要である。特に $a \geq 1/2$ を無視した下限評価は論証不足になる。下限を出した後、等号候補で断面に隙間がないことまで確認できれば満点答案になる。

【第 3 問】

曲線 $y = x^3 + ax + b$ は相異なる 2 点 P, Q を通り、点 P における接線は直線 $y = -x$ で、点 Q における接線は点 Q において直線 $y = -x$ に直交する。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

- (1) 点 P の x 座標を p 、点 Q の x 座標を q とするとき、 $q = -2p$ であることを証明せよ。
 (2) a, b の値を求めよ。

▶ 解法 1：重根を利用する

【方針】

直線 $y = -x$ との差を $g(x) = f(x) + x$ と置く。点 P では $g(p) = g'(p) = 0$ なので p は重根、点 Q では $g(q) = 0$ なので q は残る 1 根である。 x^2 の係数が 0 であることから $q = -2p$ を出し、点 Q での傾き 1 を使って p, a, b を決める。

【解答】

(1)

$$f(x) = x^3 + ax + b, \quad g(x) = f(x) + x = x^3 + (a+1)x + b$$

とおく。

点 P では曲線と直線 $y = -x$ が接するから

$$g(p) = 0, \quad g'(p) = 0.$$

したがって p は $g(x)$ の重根である。

また、点 Q における接線が点 Q で $y = -x$ と直交するので、 Q 自身も $y = -x$ 上にある。よって $g(q) = 0$ 。 P, Q は相異なるから

$$g(x) = (x-p)^2(x-q)$$

と書ける。左辺には x^2 の項がないので

$$2p + q = 0.$$

したがって

$$q = -2p.$$

(2)

$y = -x$ の傾きは -1 だから、それに直交する接線の傾きは 1 。よって

$$f'(q) = 1, \quad g'(q) = 2.$$

(1) より

$$g(x) = (x-p)^2(x+2p)$$

であり、 $x = -2p$ を代入すると

$$g'(-2p) = (-3p)^2 = 9p^2.$$

したがって

$$9p^2 = 2, \quad p = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

一方

$$(x-p)^2(x+2p) = x^3 - 3p^2x + 2p^3.$$

$g(x) = x^3 + (a+1)x + b$ と係数を比較すれば

$$a+1 = -3p^2, \quad b = 2p^3.$$

ゆえに

$$a = -\frac{5}{3}, \quad b = \pm \frac{4\sqrt{2}}{27}.$$

▶ 解法 2：接点条件を連立して消去する

【方針】

点 P, Q がともに $y = -x$ 上にある条件と、2 本の接線の傾き条件をそのまま 4 本の式にする。2 つの点条件の差を $p - q$ で割り、点 P の傾き条件を代入すると因数分解で $q = -2p$ が出る。その後は 2 つの傾き条件の差から p^2 を求める。

【解答】

(1)

P, Q はともに直線 $y = -x$ 上にあるから

$$p^3 + (a + 1)p + b = 0, \quad (1)$$

$$q^3 + (a + 1)q + b = 0. \quad (2)$$

また、点 P における傾きは -1 なので

$$3p^2 + a = -1. \quad (3)$$

(1) から (2) を引くと

$$(p - q)\{p^2 + pq + q^2 + a + 1\} = 0.$$

P, Q は相異なるから $p \neq q$ 。また (3) より $a + 1 = -3p^2$ である。したがって

$$p^2 + pq + q^2 - 3p^2 = 0,$$

$$(q - p)(q + 2p) = 0.$$

$q \neq p$ なので

$$q = -2p.$$

(2)

点 Q における接線の傾きは 1 だから

$$3q^2 + a = 1. \quad (4)$$

(4) から (3) を引いて

$$3(q^2 - p^2) = 2.$$

$q = -2p$ を代入すると

$$9p^2 = 2.$$

よって $p = \pm\sqrt{2}/3$ 。さらに (3) から

$$a = -1 - 3p^2 = -\frac{5}{3}.$$

(1) へ $a + 1 = -3p^2$ を代入すると

$$b = 2p^3.$$

したがって

$$a = -\frac{5}{3}, \quad b = \pm\frac{4\sqrt{2}}{27}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階で 6、計算量は 10 段階で 5 程度。試験場では 20～25 分が目安である。点 Q の接線が「点 Q において」直線 $y = -x$ と直交するため、 Q もその直線上にある。この読み取りが $g(q) = 0$ の根拠になる。重根を使う解法は短く、連立消去は条件の意味を一つずつ確認しやすい。最後は p の正負に対応して b が 2 通りあることを落とさない。