

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 1988 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

A, B は $A^2 - 2AB + B^2 = O$ を満たす 2 次の正方行列とする. ただし, O は零行列, A, B の各成分は実数とする. このとき, 次の (1), (2) を証明し, (3) に答えよ.

(1) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = O$

(2) $A = A', B = B'$ ならば, $A = B$ である.

ただし, A' は A の行と列とを入れ換えた行列, B' は B の行と列とを入れ換えた行列である. すなわち, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である.

(3) A, B が (2) の条件を満たさないときは, 必ずしも $A = B$ が成り立たないことを例をあげて示せ.

第 2 問

a を正の定数とする. xy 平面において, 放物線 $y = -x^2 + px + q$ は点 $(1, a)$ を通り, y 軸と正または 0 で交わるとする. この放物線と x 軸の正の部分との交点を $(t, 0)$ とし, 不等式 $x \geq 0$, $0 \leq y \leq -x^2 + px + q$ を満たす部分の面積を S とする.

- (1) t の動く範囲を a を用いて表せ.
- (2) S を a, t を用いて表せ.
- (3) S を最小にする放物線 $y = -x^2 + px + q$ を a を用いて表せ.

第 3 問

原点 O を中心とする球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を C , 平面 $y = 1$ を α とする. $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の定数 a と点 $A(0, 1, 0)$ に対して, 次の条件を満たす球面 C 上の点 P 全体のなす集合を M とする. $\angle AOP < \frac{\pi}{2}$ であって, 平面 α と点 P における C の接平面 β とのなす角 (α の法線と β の法線とのなす角) が a である.

- (1) M はどのような集合であるか, a を用いて表せ.
- (2) 平面 $px + y - z + q - \cos a = 0$ と M とが共有点をもつための p, q の満たす条件を求め, 点 (p, q) の存在範囲を図示せよ.

第 4 (a) 問

多項式 $f(x)$ は $x > 0$ の範囲で $f''(x) > 0$ を満たし, $y = f(x)$ のグラフ C は原点に関して対称とする. 正の数 a に対して, C を x 軸方向に a , y 軸方向に $f(a)$ だけ平行移動して得られる曲線を C_a とする.

- (1) C と C_a とは 2 点 $(0, 0)$, $(a, f(a))$ のみで交わり, しかも, $0 < x < a$ の範囲で $f(x - a) > f(x) - f(a)$ であることを証明せよ.
- (2) C と C_a とで囲まれた図形の面積がつねに a^4 となる $f(x)$ をすべて求めよ.

第 4 (b) 問

1 から順に 7 まで番号をつけた箱がある. 1 つの球を次の規則に従って 1 つの箱から他の箱に移す試行をくり返すものとする. 球の入っている箱の番号を a とし, サイコロを振って出た目の数を b とする. $a > b$ ならば $a - 1$ 番の箱に移し, $a \leq b$ ならば $a + 1$ 番の箱に移す. 最初は 4 番の箱に球が入っている. $2n$ 回 (偶数回) の試行後, 球が 4 番の箱に入っている確率を p_n , 2 番の箱に入っている確率を q_n , 6 番の箱に入っている確率を r_n とする.

- (1) p_1, q_1, r_1 を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ に対して, p_n, q_n, r_n を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)