

名古屋大学 1988 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

A, B は $A^2 - 2AB + B^2 = O$ を満たす 2 次の正方行列とする. ただし, O は零行列, A, B の各成分は実数とする. このとき, 次の (1), (2) を証明し, (3) に答えよ.

(1) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = O$

(2) $A = A', B = B'$ ならば, $A = B$ である.

ただし, A' は A の行と列とを入れ換えた行列, B' は B の行と列とを入れ換えた行列である. すなわち,
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である.

(3) A, B が (2) の条件を満たさないときは, 必ずしも $A = B$ が成り立たないことを例をあげて示せ.

▶ 解法 1：与式を左右から掛けて差を取る

【方針】

与式を $Q = A^2 - 2AB + B^2$ と置く. (1) の 3 次式は, 積の順序を変えずに $AQ - QB$ として一度に作れる. (2) では与式を転置した式と比較して $AB = BA$ を示すと, 条件が $(A - B)^2 = O$ になる. 最後は $A - B$ が実対称行列であることを成分に戻して結論する. (3) は 2 乗すると零行列になる非対称行列を選ぶ.

【解答】

(1)

$$Q = A^2 - 2AB + B^2$$

とおく. 仮定は $Q = O$ である. 積の順序を保ったまま, 左から A を掛けた式と右から B を掛けた式を作ると

$$AQ = A^3 - 2A^2B + AB^2 = O,$$

$$QB = A^2B - 2AB^2 + B^3 = O$$

である. 第 1 式から第 2 式を引けば

$$AQ - QB = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = O$$

となり, 示す式を得る.

(2)

$A = A', B = B'$ とする. 与式を転置すると, 積の順序が逆になるので

$$A^2 - 2BA + B^2 = O$$

である. これと元の式との差を取ると

$$AB = BA$$

を得る. したがって

$$O = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = (A - B)^2$$

である.

$$C = A - B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$$

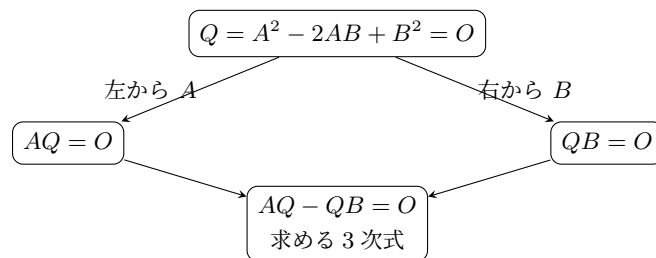
とおく. $C^2 = O$ の左上成分と右下成分から

$$u^2 + v^2 = 0, \quad v^2 + w^2 = 0$$

である。各成分は実数なので $u = v = w = 0$ 。ゆえに $C = O$ 、すなわち

$$A = B$$

である。



(3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = O$$

とする。この A は転置して変わらず、という条件を満たさず、 $A \neq B$ である。一方

$$A^2 = O$$

なので

$$A^2 - 2AB + B^2 = O.$$

したがって、(2) の条件がなければ $A = B$ とは限らない。

▶ 解法 2：差を置いて交換子を消す

【方針】

$C = A - B$ と置いて $A = B + C$ とする。条件を $C^2 = CB - BC$ に直し、(1) は非可換な積を順序どおり展開して、この関係だけで消去する。(2) では C^2 は転置して変わらない一方、 $CB - BC$ は転置で符号が変わることを利用する。(3) では $A = O$ 側に置く別の反例を示す。

【解答】

(1)

$$C = A - B, \quad A = B + C$$

とおく。条件式へ代入して積の順序を保って展開すると

$$\begin{aligned} O &= (B + C)^2 - 2(B + C)B + B^2 \\ &= BC - CB + C^2 \end{aligned}$$

であるから

$$C^2 = CB - BC. \quad (*)$$

求める 3 次式を B, C で展開すると

$$\begin{aligned} A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \\ = B^2C - 2BCB + BC^2 + CB^2 + CBC - 2C^2B + C^3. \end{aligned}$$

(*) から

$$BC^2 = BCB - B^2C, \quad C^2B = CB^2 - BCB$$

であり、さらに

$$C^3 = C(CB - BC) = C^2B - CBC = CB^2 - BCB - CBC.$$

これらを代入すると、すべての項が打ち消し合って O となる。

(2)

A, B がともに転置して変わらないなら $C = C'$ である。よって C^2 も転置して変わらない。一方

$$(CB - BC)' = BC - CB = -(CB - BC)$$

である。(*) の両辺を転置した式と元の式を比べると

$$C^2 = -C^2$$

だから $C^2 = O$ である。

$$C = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$$

と書けば、 $C^2 = O$ の対角成分は

$$u^2 + v^2 = 0, \quad v^2 + w^2 = 0.$$

したがって $u = v = w = 0$ であり、 $A - B = C = O$ 。ゆえに $A = B$ である。

(3)

別の具体例として

$$A = O, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を取る。 $B^2 = O$ だから条件式は成り立つが、 $A \neq B$ であり、 B は転置して変わらない行列ではない。

【総評】 難度は 10 段階で 7、計算量は 10 段階で 5 程度。試験場では 30 分前後が目安である。(1) は $AQ - QB$ という短い構成に気づけば大幅に計算を減らせる。(2) では転置後の式との差から可換性を導き、実対称行列の成分で締める。(3) は一般論を述べるより、2 乗すると零になる非対称行列をその場で提示するのが確実である。積の順序、転置、反例の 3 点をそれぞれ独立に確認したい。

【第 2 問】

a を正の定数とする。 xy 平面において、放物線 $y = -x^2 + px + q$ は点 $(1, a)$ を通り、 y 軸と正または 0 で交わるとする。この放物線と x 軸の正の部分との交点を $(t, 0)$ とし、不等式 $x \geq 0, 0 \leq y \leq -x^2 + px + q$ を満たす部分の面積を S とする。

(1) t の動く範囲を a を用いて表せ。

(2) S を a, t を用いて表せ。

(3) S を最小にする放物線 $y = -x^2 + px + q$ を a を用いて表せ。

▶ 解法 1：正の交点を媒介変数にする

【方針】

点 $(1, a)$ 、正の x 切片 $(t, 0)$ 、 y 切片 $q \geq 0$ の 3 条件から p, q を a, t で表す。 $q \geq 0$ により $1 < t \leq a + 1$ が出る。面積を表示積分で求めて $S(t)$ を微分し、 $t = 2$ が許されるかどうかを $a = 1$ を境に分ける。

【解答】

(1)

点 $(1, a)$ を通ることから

$$-1 + p + q = a. \quad (1)$$

また $(t, 0)$ を通るので

$$-t^2 + pt + q = 0. \quad (2)$$

$t = 1$ なら (2) と (1) が矛盾するから $t \neq 1$ 。(1)、(2) を解くと

$$p = \frac{t^2 - a - 1}{t - 1}, \quad q = \frac{t(a + 1 - t)}{t - 1}. \quad (3)$$

$0 < t < 1$ では (3) の q が負になる。よって $t > 1$ 。このとき $q \geq 0$ は $t \leq a + 1$ と同値なので

$$1 < t \leq a + 1.$$

(2)

区間 $0 \leq x \leq t$ では放物線が x 軸以上にある。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (-x^2 + px + q) dx \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{pt^2}{2} + qt. \end{aligned}$$

(3) を代入して整理すると

$$S = \frac{t^2(t^2 - 4t + 3 + 3a)}{6(t-1)}.$$

(3)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{t(t-2)\{(t-1)^2 + a\}}{2(t-1)^2}.$$

$t > 1$ 、 $a > 0$ なので、導関数の符号は $t-2$ の符号と一致する。

$0 < a < 1$ のとき、範囲 $1 < t \leq a+1$ は $t < 2$ に含まれる。よって最小は $t = a+1$ で取り、(3) から

$$p = a+1, \quad q = 0.$$

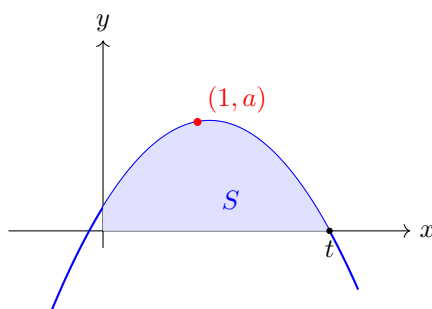
$a \geq 1$ のときは $t = 2$ が範囲に入り、そこで最小となる。このとき

$$p = 3-a, \quad q = 2a-2.$$

したがって求める放物線は

$$\begin{cases} y = -x^2 + (a+1)x & (0 < a < 1), \\ y = -x^2 + (3-a)x + 2a-2 & (a \geq 1). \end{cases}$$

$a = 1$ では両方とも $y = -x^2 + 2x$ になる。



▶ 解法 2：2 つの切片で因数分解する

【方針】

もう 1 つの x 切片を $-s$ と置く。 y 切片が非負なので $s \geq 0$ であり、放物線は $y = (t - x)(x + s)$ と書ける。点 $(1, a)$ の条件から $t = 1 + a/(1 + s)$ とし、面積を s の関数として微分する。

【解答】

放物線の正の x 切片を t 、もう 1 つの切片を $-s$ とする。最高次係数が -1 なので

$$y = (t - x)(x + s)$$

と書ける。 y 切片は $st \geq 0$ 、かつ $t > 0$ だから

$$s \geq 0.$$

(1)

点 $(1, a)$ を通る条件は

$$a = (t - 1)(1 + s).$$

したがって

$$t = 1 + \frac{a}{1 + s}.$$

$s \geq 0$ を動かすと

$$1 < t \leq a + 1.$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (t - x)(x + s) dx \\ &= \frac{t^3}{6} + \frac{st^2}{2}. \end{aligned}$$

$s = a/(t - 1) - 1$ を代入すれば

$$S = \frac{t^2(t^2 - 4t + 3 + 3a)}{6(t - 1)}$$

を得る。

(3)

今度は $t = 1 + a/(1 + s)$ を上の面積式へ代入する。

$$S(s) = \frac{(a + s + 1)^2(a + 3s^2 + 4s + 1)}{6(s + 1)^3}.$$

微分して因数分解すると

$$\frac{dS}{ds} = \frac{(s + 1 - a)(a + s + 1)\{a + (s + 1)^2\}}{2(s + 1)^4}.$$

後ろの因子はすべて正なので、符号は $s + 1 - a$ で決まる。

$0 < a < 1$ では $s \geq 0$ で常に増加し、最小は $s = 0$ 。よって $t = a + 1$ で

$$y = -x^2 + (a + 1)x.$$

$a \geq 1$ では最小は $s = a - 1$ 。このとき $t = 2$ だから

$$y = (2 - x)(x + a - 1) = -x^2 + (3 - a)x + 2a - 2.$$

したがって解法 1 と同じ場合分けを得る。

【総評】 難度は 10 段階で 6、計算量は 10 段階で 6 程度。試験場では 25～30 分が目安である。最初の採点点は $q \geq 0$ から $1 < t \leq a + 1$ を出すこと、次は面積を積分して 1 変数にすることである。微分後は $t = 2$ が定義域に入るかを確認し、 $a = 1$ で場合分けする。別解のように 2 つの切片で因数分解すると、 y 切片条件と点 $(1, a)$ の条件が幾何的に見えやすい。

【第 3 問】

原点 O を中心とする球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を C , 平面 $y = 1$ を α とする. $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の定数 a と点 $A(0, 1, 0)$ に対して, 次の条件を満たす球面 C 上の点 P 全体のなす集合を M とする. $\angle AOP < \frac{\pi}{2}$ であって, 平面 α と点 P における C の接平面 β とのなす角 (α の法線と β の法線とのなす角) が a である.

- (1) M はどのような集合であるか, a を用いて表せ.
- (2) 平面 $px + y - z + q - \cos a = 0$ と M とが共有点をもつための p, q の満たす条件を求め, 点 (p, q) の存在範囲を図示せよ.

▶ 解法 1: 円と直線の距離に帰着する

【方針】

球面上の点 $P = (x, y, z)$ では, 接平面の法線が $\overrightarrow{OP}$ になる. 平面 $y = 1$ の法線との角から $|y| = \cos a$, さらに $\angle AOP < \pi/2$ から $y > 0$ を選ぶ. こうして M を平面上の円として表し, (2) は xz 平面内の円と直線の距離条件に直す.

【解答】

(1)

$P = (x, y, z)$ とする. 球面上なので

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

平面 $\alpha: y = 1$ の法線は $(0, 1, 0)$ 、点 P における球面の接平面 β の法線は (x, y, z) である. 2 法線のなす角が a であることから

$$|y| = \cos a.$$

一方、 $A = (0, 1, 0)$ なので

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = y.$$

$\angle AOP < \pi/2$ より $y > 0$. したがって

$$y = \cos a.$$

球面の式へ代入すると

$$x^2 + z^2 = \sin^2 a.$$

よって

$$M: y = \cos a, \quad x^2 + z^2 = \sin^2 a$$

であり、 M は平面 $y = \cos a$ 上で中心 $(0, \cos a, 0)$ 、半径 $\sin a$ の円である。

(2)

M 上で $y = \cos a$ を平面の式へ代入すると

$$px - z + q = 0.$$

したがって、 xz 平面の円

$$x^2 + z^2 = \sin^2 a$$

と直線 $px - z + q = 0$ が共有点をもつ条件を求めればよい。

原点からこの直線までの距離は

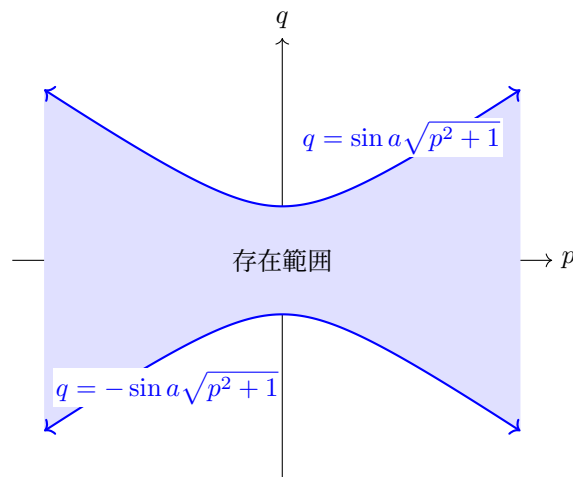
$$\frac{|q|}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

これが円の半径以下であることが必要十分だから

$$q^2 \leq (p^2 + 1) \sin^2 a.$$

すなわち

$$-\sin a \sqrt{p^2 + 1} \leq q \leq \sin a \sqrt{p^2 + 1}.$$



境界を含む、上下 2 曲線にはさまれた領域が求める存在範囲である。

▶ 解法 2：円を三角関数で媒介する

【方針】

角の条件から M を円と決めた後、その円を $P = (\sin a \cos \theta, \cos a, \sin a \sin \theta)$ と媒介表示する。平面条件は $p \cos \theta - \sin \theta = -q/\sin a$ となるので、左辺の取り得る範囲を合成して共有点条件を得る。

【解答】

(1)

平面 $y = 1$ の法線は $\vec{OA}$ 、点 P での球面の接平面の法線は $\vec{OP}$ である。両者のなす角が a 、かつ $\angle AOP < \pi/2$ なので

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| |\vec{OP}| \cos a = \cos a.$$

左辺は P の y 座標である。よって

$$y = \cos a, \quad x^2 + z^2 = \sin^2 a.$$

したがって M は解法 1 で述べた円である。

(2)

この円上の点を

$$P(\theta) = (\sin a \cos \theta, \cos a, \sin a \sin \theta)$$

と表す。平面の式へ代入すると

$$\sin a (p \cos \theta - \sin \theta) + q = 0. \quad (1)$$

正の数 $R = \sqrt{p^2 + 1}$ と角 φ を

$$\cos \varphi = \frac{p}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{R}$$

で定めれば

$$p \cos \theta - \sin \theta = R \cos(\theta + \varphi).$$

したがって左辺の取り得る範囲は

$$-\sqrt{p^2 + 1} \leq p \cos \theta - \sin \theta \leq \sqrt{p^2 + 1}.$$

(1) を満たす θ が存在するための必要十分条件は

$$\left| \frac{q}{\sin a} \right| \leq \sqrt{p^2 + 1}.$$

ゆえに

$$q^2 \leq (p^2 + 1) \sin^2 a$$

である。

【総評】 難度は 10 段階で 6、計算量は 10 段階で 5 程度。試験場では 20～25 分が目安である。接平面の法線が半径方向であることを使えば、空間図形は $y = \cos a$ 上の円へ一気に簡約できる。 $\angle AOP < \pi/2$ は $y = \cos a$ の符号を選ぶ条件なので省略しない。(2) は円と直線の距離、または三角関数の合成のどちらでもよい。図示では不等号の向きを確認し、双曲線の外側ではなく上下の境界曲線にはさまれた部分を塗る。

【第 4 問 (a)】

多項式 $f(x)$ は $x > 0$ の範囲で $f''(x) > 0$ を満たし、 $y = f(x)$ のグラフ C は原点に関して対称とする。正の数 a に対して、 C を x 軸方向に a 、 y 軸方向に $f(a)$ だけ平行移動して得られる曲線を C_a とする。

- (1) C と C_a とは 2 点 $(0, 0)$, $(a, f(a))$ のみで交わり、しかも、 $0 < x < a$ の範囲で $f(x - a) > f(x) - f(a)$ であることを証明せよ。
- (2) C と C_a とで囲まれた図形の面積がつねに a^4 となる $f(x)$ をすべて求めよ。

▶ 解法 1：凸性と面積の微分を使う

【方針】

原点对称から f は奇関数である。(1) は $g(x) = f(a) - f(a - x) - f(x)$ を作り、 $g'' < 0$ と両端の値から区間内の厳密な上下関係を示す。区間外は f' の単調性で交点が増えないことを確認する。(2) は面積を

$$af(a) - 2 \int_0^a f(x) dx$$

に整理し、 a で微分して f を決定する。

【解答】

(1)

グラフ C が原点对称なので

$$f(-x) = -f(x), \quad f(0) = 0.$$

$0 \leq x \leq a$ で

$$g(x) = f(a) - f(a - x) - f(x)$$

とおく。両端では $g(0) = g(a) = 0$ 。また $0 < x < a$ で

$$g''(x) = -f''(a - x) - f''(x) < 0.$$

よって g は厳密に上に凸であり、区間内部では $g(x) > 0$ 。奇関数性から $f(x - a) = -f(a - x)$ なので

$$f(x - a) > f(x) - f(a) \quad (0 < x < a)$$

を得る。

C_a の式は

$$y = f(x - a) + f(a)$$

である。交点を調べるため

$$H(x) = f(x) - f(x - a) - f(a)$$

とおく。 $H(0) = H(a) = 0$ であり、今示した不等式から $0 < x < a$ では $H(x) < 0$ 。

$x > a$ では $x > x - a > 0$ だから、 f' が $x > 0$ で増加することより

$$H'(x) = f'(x) - f'(x - a) > 0.$$

ゆえに $H(x) > H(a) = 0$ 。

$x < 0$ では f' が偶関数であるから

$$H'(x) = f'(-x) - f'(a - x) < 0$$

である。 $H(0) = 0$ より $x < 0$ で $H(x) > 0$ 。したがって交点は

$$(0, 0), (a, f(a))$$

の 2 点だけである。

(2)

$0 < x < a$ では C_a が C より上にある。囲まれた面積を $S(a)$ とすると

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \{f(x-a) + f(a) - f(x)\} dx \\ &= af(a) - 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

条件から

$$af(a) - 2 \int_0^a f(x) dx = a^4.$$

両辺を a で微分すると

$$af'(a) - f(a) = 4a^3.$$

したがって

$$\left(\frac{f(a)}{a} \right)' = 4a.$$

積分して

$$\frac{f(a)}{a} = 2a^2 + C,$$

ゆえに

$$f(x) = 2x^3 + Cx$$

である。

逆に、この多項式は奇関数であり

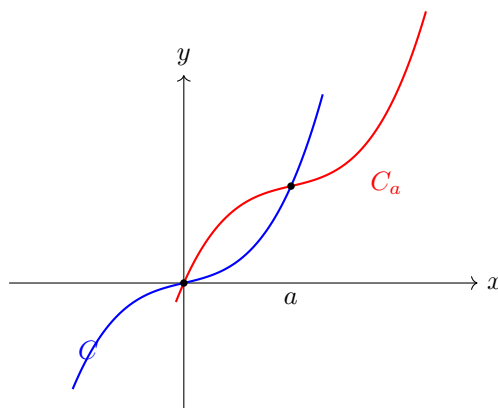
$$f''(x) = 12x > 0 \quad (x > 0).$$

また

$$\begin{aligned} af(a) - 2 \int_0^a f(x) dx &= a(2a^3 + Ca) - 2 \int_0^a (2x^3 + Cx) dx \\ &= a^4. \end{aligned}$$

よって

$$f(x) = 2x^3 + Cx \quad (C \text{ は任意の実数}).$$



▶ 解法 2：弦の不等式と係数比較を使う

【方針】

(1) は $f'' > 0$ による厳密な凸性を、原点と $(a, f(a))$ を結ぶ弦との比較として使う。(2) は f が奇多項式であることから奇数次の項だけを書き、各単項式が面積へ与える係数を直接計算する。恒等式 $S(a) = a^4$ の係数比較で三次項以外を消す。

【解答】

(1)

原点对称より f は奇関数であり、 $f(0) = 0$ 。また $f''(x) > 0$ だから、 $x > 0$ でグラフは厳密に下に凸である。したがって $0 < x < a$ では、グラフは $(0, 0)$ と $(a, f(a))$ を結ぶ弦より下にあり

$$f(x) < \frac{x}{a}f(a), \quad f(a-x) < \frac{a-x}{a}f(a).$$

2 式を加えると

$$f(x) + f(a-x) < f(a).$$

$f(x-a) = -f(a-x)$ なので

$$f(x-a) > f(x) - f(a)$$

を得る。

$x > a$ では、 f' が増加するため、長さ a の区間上の増分は右へ移すほど大きい。よって

$$f(x) - f(x-a) > f(a) - f(0) = f(a).$$

$x < 0$ で $u = -x > 0$ と置けば

$$f(x) - f(x-a) - f(a) = f(u+a) - f(u) - f(a) > 0.$$

したがって $0 < x < a$ では 2 曲線の差の符号が反対で、区間外では 0 にならない。交点は $(0, 0)$ 、 $(a, f(a))$ のみである。

(2)

f は奇多項式なので、ある実数 $c_0, c_1, \dots, c_m$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^{2k+1}$$

と書ける。(1) から面積は

$$S(a) = af(a) - 2 \int_0^a f(x) dx.$$

各項ごとに計算すると

$$\begin{aligned} S(a) &= \sum_{k=0}^m c_k \left(1 - \frac{2}{2k+2}\right) a^{2k+2} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{k+1} c_k a^{2k+2}. \end{aligned}$$

これがすべての $a > 0$ について a^4 に等しい。多項式の係数を比較すると

$$\frac{1}{2}c_1 = 1, \quad c_k = 0 \quad (k \geq 2).$$

c_0 は面積に影響しないので任意である。よって

$$f(x) = 2x^3 + c_0x.$$

この形なら $f''(x) = 12x > 0$ であり、条件を確かに満たす。

【総評】 難度は 10 段階で 8、計算量は 10 段階で 7 程度。試験場では 35～40 分を見込む。原点对称から奇関数、 $f'' > 0$ から正の範囲での厳密な凸性、という 2 条件を分けて使う。(1) は区間内の上下関係だけでなく、区間外に交点がないことまで示す必要がある。(2) では定積分を必ず表示し、奇関数性で面積を

$$af(a) - 2 \int_0^a f(x) dx$$

に整理する。微分法と係数比較のどちらでも、最後に得た多項式が元の条件を満たす逆確認まで書く。

【第 4 問 (b)】

1 から順に 7 まで番号をつけた箱がある. 1 つの球を次の規則に従って 1 つの箱から他の箱に移す試行をくり返すものとする. 球の入っている箱の番号を a とし, サイコロを振って出た目の数を b とする. $a > b$ ならば $a - 1$ 番の箱に移し, $a \leq b$ ならば $a + 1$ 番の箱に移す. 最初は 4 番の箱に球が入っている. $2n$ 回 (偶数回) の試行後, 球が 4 番の箱に入っている確率を p_n , 2 番の箱に入っている確率を q_n , 6 番の箱に入っている確率を r_n とする.

- (1) p_1, q_1, r_1 を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ に対して, p_n, q_n, r_n を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

▶ 解法 1: 左右対称性で中心確率だけにする

【方針】

2 回を 1 組にすると, 偶数回後に球があり得る箱は 2, 4, 6 だけになる. 2 回推移を求め, 左右対称性 $q_n = r_n$ と確率の和から p_n だけの 1 次漸化式にする.

【解答】

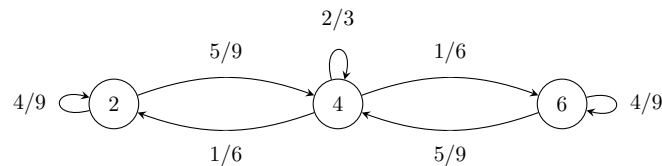
(1)

4 番から 3 番、5 番へはそれぞれ確率 $1/2$ 、そこから外側へは確率 $1/3$ 、4 番へは確率 $2/3$ で移る. したがって

$$p_1 = \frac{2}{3}, \quad q_1 = r_1 = \frac{1}{6}.$$

(2)

2 回推移は次図のとおりである. 例えば 2 番から 2 番へは $1/6 + (5/6)(1/3) = 4/9$ 、4 番へは $(5/6)(2/3) = 5/9$. 4 番からは $1/6, 2/3, 1/6$ であり、6 番側は左右対称である.



左右対称性から

$$q_n = r_n$$

であり, また $p_n + q_n + r_n = 1$. よって

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{5}{9}q_n + \frac{2}{3}p_n + \frac{5}{9}r_n \\ &= \frac{5}{9} + \frac{1}{9}p_n. \end{aligned}$$

定数解は $5/8$ なので, $p_0 = 1$ と合わせて

$$p_{n+1} - \frac{5}{8} = \frac{1}{9} \left(p_n - \frac{5}{8} \right), \quad p_n = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9} \right)^n.$$

また $q_n = r_n = (1 - p_n)/2$ より

$$q_n = r_n = \frac{3}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right\}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{5}{8}.$$

▶ 解法 2：中心と片側の確率差を追う

【方針】

2 回ごとの 3 本の漸化式を立てた後、対称性で $q_n = r_n$ とする。定常値を先に求める代わりに、中心の確率と片側の確率の組 $d_n = p_n - \frac{10}{3}q_n$ を作ると、毎回 $1/9$ 倍になる。確率の和と連立して 3 数を復元する。

【解答】

(1)

2 回の試行を直接追えば

$$p_1 = \frac{2}{3}, \quad q_1 = r_1 = \frac{1}{6}.$$

(2)

2 回を 1 組とする。箱 2, 4, 6 から 2 回後の確率を用いると

$$p_{n+1} = \frac{5}{9}q_n + \frac{2}{3}p_n + \frac{5}{9}r_n, \quad (1)$$

$$q_{n+1} = \frac{4}{9}q_n + \frac{1}{6}p_n, \quad (2)$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{4}{9}r_n. \quad (3)$$

初期状態が 4 番で、規則が 4 番を中心に左右対称なので、(2)、(3) から帰納的に

$$q_n = r_n$$

である。

$$d_n = p_n - \frac{10}{3}q_n$$

とおく。(1)、(2) へ $r_n = q_n$ を代入すると

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{10}{9}q_n \right) - \frac{10}{3} \left(\frac{1}{6}p_n + \frac{4}{9}q_n \right) \\ &= \frac{1}{9}p_n - \frac{10}{27}q_n \\ &= \frac{1}{9}d_n. \end{aligned}$$

$p_0 = 1, q_0 = 0$ なので $d_0 = 1$ 。したがって

$$d_n = \left(\frac{1}{9} \right)^n.$$

また

$$p_n + 2q_n = 1.$$

これと $p_n - \frac{10}{3}q_n = d_n$ を解けば

$$p_n = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}d_n, \quad q_n = r_n = \frac{3}{16}(1 - d_n).$$

ゆえに

$$p_n = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9} \right)^n, \quad q_n = r_n = \frac{3}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right\}.$$

(3) $d_n \rightarrow 0$ だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{5}{8}$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5、目安 20～25 分。2 回を 1 組として箱 2, 4, 6 に圧縮し、端から戻る確率も自己推移へ含める。左右対称性と確率の和から 1 次漸化式にすることが得点の中心である。