

名古屋大学 1990 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2つの放物線 $y = x^2$ と $y = ax^2 + bx + c$ とは 2 点で交わり、交点におけるこれら 2 つの放物線の接線は互いに直交するという. a, b, c が変化するとき、このような放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の全体はどのような集合をつくるか調べ、その集合を図示せよ.

▶ 解法 1：頂点を未知数として係数を比べる

【方針】

第 2 の放物線を頂点形式 $y = a(x - X)^2 + Y$ で表す. 交点条件と接線の直交条件は、交点の x 座標を共通の 2 根にもつ 2 次方程式になる. $X \neq 0$ と $X = 0$ を分けて係数を比較し、最後に逆向きも確認して軌跡を確定する.

【解答】

第 2 の放物線の頂点を (X, Y) とおき、

$$y = a(x - X)^2 + Y$$

と表す. これは放物線であるから $a \neq 0$ である.

2 曲線の交点の x 座標は

$$(1 - a)x^2 + 2aXx - (aX^2 + Y) = 0 \quad (1)$$

の相異なる 2 根である. 交点における接線の傾きはそれぞれ $2x$, $2a(x - X)$ なので、直交条件は

$$2x \cdot 2a(x - X) = -1,$$

すなわち

$$4ax^2 - 4aXx + 1 = 0 \quad (2)$$

である. (1), (2) は同じ相異なる 2 根をもつ.

まず $X \neq 0$ とする. (1) は (2) の $-1/2$ 倍であるから

$$1 - a = -2a, \quad -(aX^2 + Y) = -\frac{1}{2}.$$

よって

$$a = -1, \quad Y = X^2 + \frac{1}{2}. \quad (3)$$

次に $X = 0$ とする. (2) が相異なる実数解をもつため $a < 0$ で、その根では $x^2 = -1/(4a)$ である. (1) へ代入すると

$$Y = \frac{a - 1}{4a} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4a} > \frac{1}{4}. \quad (4)$$

逆に、 $X \neq 0$ かつ (3) を満たす点では $a = -1$ とすれば (1), (2) は比例し、判別式も正になる. また $X = 0$, $Y > 1/4$ では

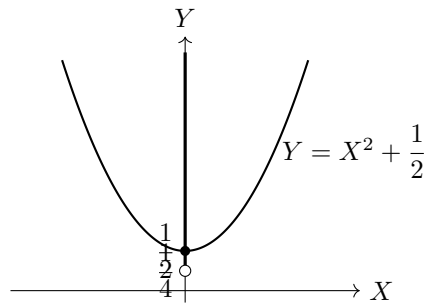
$$a = \frac{1}{1 - 4Y} < 0$$

とすれば (1), (2) が同じ相異なる 2 根をもつ.

したがって求める集合は

$$\left\{ (X, Y) \mid Y = X^2 + \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (0, Y) \mid Y > \frac{1}{4} \right\}.$$

点 $(0, 1/2)$ は両方に含まれる.



▶ 解法 2：交点を 2 根として解と係数の関係を使う

【方針】

交点の x 座標を u, v とおく。交点条件と直交条件から得る二つの 2 次方程式に解と係数の関係を使い、 $b \neq 0$ と $b = 0$ を分ける。最後に係数から頂点座標を計算する。

【解答】

交点の x 座標を相異なる実数 u, v とする。交点条件は

$$(a-1)x^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

接線の直交条件は

$$2x(2ax + b) = -1,$$

すなわち

$$4ax^2 + 2bx + 1 = 0 \quad (2)$$

である。両式は u, v を共通の 2 根にもつ。

$b \neq 0$ のとき、解と係数の関係から

$$u + v = -\frac{b}{a-1} = -\frac{b}{2a}.$$

よって $a-1 = 2a$ 、すなわち $a = -1$ である。また

$$uv = \frac{c}{a-1} = \frac{1}{4a}$$

より $c = 1/2$ を得る。頂点は

$$X = -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}, \quad Y = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{1}{2} + \frac{b^2}{4}$$

であるから $X \neq 0$ かつ

$$Y = X^2 + \frac{1}{2}.$$

$b = 0$ のとき、(2) が相異なる実数解をもつため $a < 0$ である。共通の根の積を比べると

$$\frac{c}{a-1} = \frac{1}{4a},$$

したがって

$$c = \frac{a-1}{4a} > \frac{1}{4}.$$

この場合の頂点は $(0, c)$ である。逆に任意の $c > 1/4$ に対し $a = 1/(1-4c) < 0$ とおけば条件を満たす。

以上より、頂点全体は

$$Y = X^2 + \frac{1}{2}$$

という放物線と、 Y 軸上の半直線

$$X = 0, \quad Y > \frac{1}{4}$$

の和集合である。

【総評】 交点条件と接線の直交条件を、同じ相異なる 2 根をもつ 2 次方程式として結び付ける問題である。目安時間は 25 分。 $X = 0$ 、または同値な $b = 0$ の場合を分離しないと、 Y 軸上の半直線を落とす。必要条件を出すだけでなく、得られた各点から実際に係数を戻せることまで確認して軌跡を完成させた。2 解法は係数比較と解と係数の関係で相互照合した。行列は使用していない。

【第 2 問】

底辺 BC の長さが 2、高さが a (a は定数) の二等辺三角形 ABC がある。頂点 B を xy 平面の半直線 $y = x$ ($x \geq 0$) 上に、 C を半直線 $y = -x$ ($x \geq 0$) 上に置き、頂点 A は直線 BC に関して原点 O の反対側にくるようにする。三角形 ABC を可能な限り動かすとき、 A が描く図形を求めよ。

▶ 解法 1：中点と単位法線から頂点を表す

【方針】

$B = (u, u)$ 、 $C = (v, -v)$ とおき、 $BC = 2$ を使う。頂点 A は底辺の中点から、原点と反対側を向く単位法線方向へ高さ a だけ進んだ点である。和 $S = u + v$ と差 $T = u - v$ で消去し、端点の包含まで決める。

【解答】

高さであるから $a > 0$ である。

$$B = (u, u), \quad C = (v, -v)$$

とおく。半直線上にあるので $u, v \geq 0$ だが、 $u = 0$ または $v = 0$ では原点が直線 BC 上にあり、「反対側」が定まらない。よって

$$u > 0, \quad v > 0.$$

$BC = 2$ より

$$(u - v)^2 + (u + v)^2 = 4,$$

したがって

$$u^2 + v^2 = 2. \quad (1)$$

底辺の中点は

$$M = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right)$$

である。原点と反対側を向く BC の単位法線ベクトルは

$$\frac{1}{2}(u+v, v-u)$$

なので、 $A = (X, Y)$ は

$$X = \frac{1+a}{2}(u+v), \quad Y = \frac{1-a}{2}(u-v). \quad (2)$$

$S = u + v$ 、 $T = u - v$ とおくと、(1) は

$$S^2 + T^2 = 4$$

となる。また $u, v > 0$ より

$$\sqrt{2} < S \leq 2. \quad (3)$$

$a \neq 1$ のとき、(2) から S, T を消去すると

$$\frac{X^2}{(1+a)^2} + \frac{Y^2}{(1-a)^2} = 1.$$

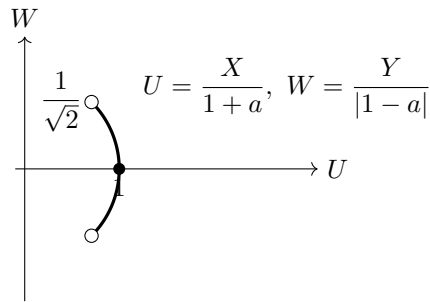
(3) より実際に描く部分は

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} < X \leq 1+a. \quad (4)$$

左端の 2 点は B または C が原点に来る極限なので含まれず、右端 $(1+a, 0)$ は $u = v = 1$ に対応して含まれる。

$a = 1$ のときは

$$Y = 0, \quad \sqrt{2} < X \leq 2.$$



▶ 解法 2：三角関数で底辺の配置を媒介表示する

【方針】

$u^2 + v^2 = 2$ と $u, v > 0$ を利用して $u = \sqrt{2} \cos \phi$, $v = \sqrt{2} \sin \phi$ とおく。中点と法線から A を ϕ で媒介表示し、和差の恒等式で楕円を得る。媒介変数の開区間から端点条件も読み取る。

【解答】

$$B = (u, u), \quad C = (v, -v)$$

とおくと、 $BC = 2$ から $u^2 + v^2 = 2$ である。また原点が直線 BC 上にないため $u, v > 0$ である。したがって

$$u = \sqrt{2} \cos \phi, \quad v = \sqrt{2} \sin \phi, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

と表せる。

底辺の中点から原点と反対側へ高さ a だけ進むと

$$\begin{aligned} X &= \frac{1+a}{\sqrt{2}}(\cos \phi + \sin \phi), \\ Y &= \frac{1-a}{\sqrt{2}}(\cos \phi - \sin \phi). \end{aligned} \tag{1}$$

$a \neq 1$ のとき、(1) をそれぞれ $1+a$ 、 $1-a$ で割り、二乗して加えると

$$\frac{X^2}{(1+a)^2} + \frac{Y^2}{(1-a)^2} = 1.$$

さらに

$$1 < \cos \phi + \sin \phi \leq \sqrt{2}$$

で、等号 $\sqrt{2}$ は $\phi = \pi/4$ のときに成り立つ。よって

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} < X \leq 1+a.$$

$a = 1$ なら (1) から

$$Y = 0, \quad X = \sqrt{2}(\cos \phi + \sin \phi),$$

したがって

$$\sqrt{2} < X \leq 2.$$

これが求める図形である。

【総評】 底辺の両端を半直線上の座標で表し、中点と法線方向から頂点を出す軌跡問題である。目安時間は 22 分。楕円の式だけでなく、原点が底辺上に来る配置を除外して開端点を示す必要がある。 $a = 1$ では楕円が線分へ退化するため別に扱った。2 解法は和差変数と三角関数による媒介表示で相互照合した。行列は使用していない。

【第 3 問】

円周上に、右まわりの順で 3 点 A, B, C があり、円周に沿ってこれらの点の上を右まわりに進むものとする。1 つのサイコロを投げて、偶数の目が出ればその数だけ進み、奇数ならば 1 つ進む試行をくり返す。初め A にいて、 n 回の試行の後で A にいる確率を p_n , B にいる確率を q_n , C にいる確率を r_n として、次の問に答えよ。

(1) p_n を r_{n-1} ($n \geq 2$) で表せ。

(2) p_{3n} を求めよ。

▶ 解法 1 : 3 回を一組にして確率漸化式を作る

【方針】

一回の移動を 3 で割った余り $0, 1, 2$ に整理する。(1) は一つ前の各位置から A へ来る場合を加える。(2) は 3 回分の余りを数え、同じ点へ戻る確率と他の各点へ移る確率から $P_n = p_{3n}$ の一次漸化式を作る。

【解答】

(1)

一回に進む数を 3 で割った余りで見る。余り $0, 1, 2$ となる確率はそれぞれ

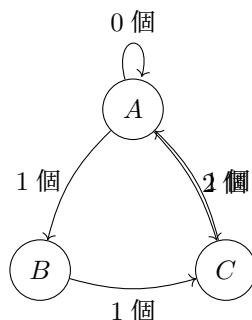
$$\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{6}$$

である。したがって

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{2}{3}r_{n-1}.$$

$p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1} = 1$ より

$$p_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}r_{n-1}.$$



(2)

3 回後に同じ点へ戻る確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

3 回後に右隣の点へ行く確率は

$$3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{7}{24}.$$

左隣へ行く確率も $7/24$ である。

$P_n = p_{3n}$ とおくと $P_0 = 1$ であり、

$$P_{n+1} = \frac{5}{12}P_n + \frac{7}{24}(1 - P_n) = \frac{7}{24} + \frac{1}{8}P_n.$$

よって

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \left(P_n - \frac{1}{3} \right).$$

したがって

$$p_{3n} = P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 8^n}.$$

▶ 解法 2：1 回分の多項式と 3 乗根で数える

【方針】

一回の移動の重みを多項式 $F(x) = (1 + 4x + x^2)/6$ にまとめる。 $3n$ 回後に A へ戻るのは指数が 3 の倍数の項である。1 の 3 乗根を代入して 3 の倍数項だけを取り出し、 $F(\omega)$ を簡単化する。

【解答】

(1)

一回で 0, 1, 2 個進む確率は $1/6, 2/3, 1/6$ である。一つ前に A, B, C にいる場合を分ければ

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{2}{3}r_{n-1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}r_{n-1}.$$

(2)

一回の移動を表す多項式を

$$F(x) = \frac{1 + 4x + x^2}{6}$$

とする。 $F(x)^{3n}$ の x^k の係数は、 $3n$ 回で合計 k 個進む確率である。

$\omega^3 = 1, \omega \neq 1$ を満たす複素数 ω をとると

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

任意の整数 k について

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} = \begin{cases} 3 & (k \text{ が } 3 \text{ の倍数}), \\ 0 & (k \text{ が } 3 \text{ の倍数でない}) \end{cases}$$

である。したがって

$$p_{3n} = \frac{1}{3} \{ F(1)^{3n} + F(\omega)^{3n} + F(\omega^2)^{3n} \}. \quad (1)$$

$F(1) = 1$ である。また

$$F(\omega) = \frac{1 + 4\omega + \omega^2}{6} = \frac{\omega}{2}, \quad F(\omega^2) = \frac{\omega^2}{2}.$$

これを (1) へ代入すると

$$\begin{aligned} p_{3n} &= \frac{1}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega}{2} \right)^{3n} + \left(\frac{\omega^2}{2} \right)^{3n} \right\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 8^n}. \end{aligned}$$

【総評】 サイコロの目そのものではなく、3 点上の移動なので 3 で割った余りへ直す。目安時間は 20 分。(1) は直前の位置による場合分け、(2) は 3 回を一組にすると実数の一次漸化式だけで解ける。第 2 解法は高校数学の複素数を用いた 3 の倍数項の抽出で独立に検算した。

【第 4 問】

円 D は xy 平面で $x > 0$ の部分にあり、中心 C は x 軸上にあつて、曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ とは点 $P\left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ で接線を共有しているとする。

(1) この円の $x \geq a$ の部分にある弧と直線 $x = a$ とで囲まれる図形を、 y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(a)$ とし、 x 軸と直線 CP とのなす角を $\theta(a)$ ($0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}$) とする。 $V(a)$ を a と $\theta(a)$ を用いて表せ。

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} \theta(a)$ を求め、次に $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

▶ 解法 1：水平断面を円環として積分する

【方針】

接線の傾きから半径 CP の角 θ を求め、中心座標 c と半径 R を表す。円弧部分を y 軸のまわりに回すと、高さ y の断面は内半径 a 、外半径 $c + \sqrt{R^2 - y^2}$ の円環になる。1 変数の回転体積分を $y = R \sin t$ で計算する。

【解答】

(1)

曲線 $y = x^{-1/2}$ の $x = a$ における接線の傾きは

$$-\frac{1}{2a^{3/2}}.$$

半径 CP は接線に垂直なので

$$\tan \theta(a) = 2a^{3/2}. \quad (1)$$

以下 $\theta = \theta(a)$ と書く。中心を $C = (c, 0)$ 、半径を R とすると

$$R \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad R \cos \theta = a - c.$$

よって

$$R = \frac{1}{\sqrt{a} \sin \theta}, \quad c = a - \frac{\cot \theta}{\sqrt{a}}. \quad (2)$$

高さ y において、円弧部分は

$$a \leq x \leq c + \sqrt{R^2 - y^2}$$

を占める。これを y 軸のまわりに回すと円環になるので

$$V(a) = \pi \int_{-R \sin \theta}^{R \sin \theta} \left\{ \left(c + \sqrt{R^2 - y^2} \right)^2 - a^2 \right\} dy. \quad (3)$$

これは 1 変数の回転体積分である。

(3) で $y = R \sin t$ とおくと

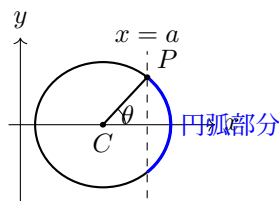
$$-\theta \leq t \leq \theta, \quad dy = R \cos t \, dt.$$

また $a = c + R \cos \theta$ である。偶関数であることを使って展開・積分すると

$$V(a) = 2\pi \left\{ cR^2(\theta - \sin \theta \cos \theta) + \frac{2}{3}R^3 \sin^3 \theta \right\}. \quad (4)$$

(2) を代入すれば

$$V(a) = 2\pi \left[\left(a - \frac{\cot \theta}{\sqrt{a}} \right) \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{a \sin^2 \theta} + \frac{2}{3a^{3/2}} \right].$$



(2)

(1) より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \theta(a) = \frac{\pi}{2}.$$

また

$$\cot \theta = \frac{1}{2a^{3/2}}$$

なので

$$\frac{\cot \theta}{\sqrt{a}} \rightarrow 0, \quad \sin \theta \rightarrow 1, \quad \theta - \sin \theta \cos \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

(4) の表式から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2.$$

▶ 解法 2：円筒殻の 1 変数積分で求める

【方針】

円弧部分の縦の長さを y 軸まわりの円筒殻として 1 変数積分する。 $x - c = R \cos t$ の置換で角 θ を使う。

【解答】

(1)

接線と半径は垂直なので、中心 $C = (c, 0)$ 、半径 R とすると

$$\tan \theta = 2a^{3/2}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{a} \sin \theta}, \quad c = a - \frac{\cot \theta}{\sqrt{a}}, \quad a = c + R \cos \theta. \quad (1)$$

円弧部分の x における縦の長さは $2\sqrt{R^2 - (x - c)^2}$ である。円筒殻として積分すると

$$V(a) = 4\pi \int_a^{c+R} x \sqrt{R^2 - (x - c)^2} dx. \quad (2)$$

(2) で $x - c = R \cos t$ とおく。積分区間は θ から 0 へ移るので

$$V(a) = 4\pi R^2 \int_0^\theta (c + R \cos t) \sin^2 t dt.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \sin^2 t dt &= \frac{1}{2}(\theta - \sin \theta \cos \theta), \\ \int_0^\theta \cos t \sin^2 t dt &= \frac{1}{3} \sin^3 \theta \end{aligned}$$

を用いると

$$V(a) = 2\pi \left\{ cR^2(\theta - \sin \theta \cos \theta) + \frac{2}{3}R^3 \sin^3 \theta \right\}.$$

(1) を代入すると

$$V(a) = 2\pi \left[\left(a - \frac{\cot \theta}{\sqrt{a}} \right) \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{a \sin^2 \theta} + \frac{2}{3a^{3/2}} \right].$$

(2)

 $\tan \theta = 2a^{3/2}$ より $\theta \rightarrow \pi/2$ である。上式では第 1 項の角因子が $\pi/2$ 、第 2 項が 0 へ近づくため

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \pi^2.$$

【総評】 接線と半径の直交、円弧部分の回転体積、極限をつなぐ問題である。目安時間は 32 分。回転させるのは $x = a$ より右の小さい円弧部分である。2 解法とも高校数学 III の 1 変数積分だけで構成し、円環法と円筒殻法で相互照合した。旧答案の 2 変数極座標積分は使用していない。