

名古屋大学 1995 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$$\text{球面 } S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0,$$

$$\text{平面 } K : x + 2y - 2z = k$$

について次の問に答えよ. ただし, k は定数である.

(1) S と K が共有点を持つための k の範囲を求めよ.

(2) S と K が交わってできる円を底面とし, S の中心を頂点とする円錐の体積を最大にする k の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

球面は平方完成して中心と半径を求める。平面との共有点条件は, 球の中心から平面までの距離が半径以下であることに言い換えられる。(2) では中心から平面までの距離を d とし, 切り口の円の半径を $\sqrt{9-d^2}$, 円錐の高さを d として体積を 1 変数関数にする。端点では体積が 0 になるので, 微分で内部の最大点を決める。

【解答】

(1)

球面 S の式を平方完成すると $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 4 = 0$ より $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ である。したがって, 球の中心は $I = (1, 2, 0)$ で, 半径は 3 である。

平面 $K : x + 2y - 2z = k$ と中心 I との距離は $\frac{|1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|5 - k|}{3}$ である。球面と平面が共有点を持つために

は, この距離が球の半径 3 以下であればよい。よって $\frac{|5 - k|}{3} \leq 3$ すなわち $|5 - k| \leq 9$ である。したがって $-4 \leq k \leq 14$ である。

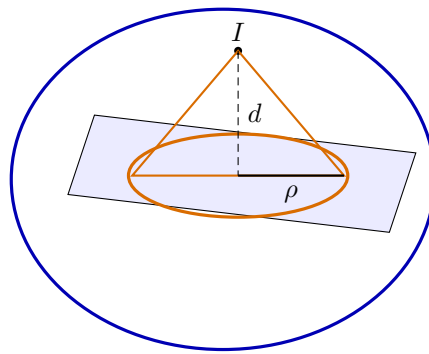
(2)

中心 I から平面 K までの距離を d とおく。 $0 \leq d \leq 3$ であり, 切り口の円の半径を ρ とすると, 球の半径が 3 なので $\rho^2 + d^2 = 9$ である。したがって $\rho^2 = 9 - d^2$ である。

この円を底面, 球の中心を頂点とする円錐の高さは d であるから, 体積 V は $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2d = \frac{1}{3}\pi(9 - d^2)d$ である。定数 $\pi/3$ を除いて $h(d) = 9d - d^3$ を $0 \leq d \leq 3$ で最大にすればよい。微分すると $h'(d) = 9 - 3d^2 = 3(3 - d^2)$ である。したがって $0 < d < 3$ では $d = \sqrt{3}$ で増減が増加から減少に変わる。また端点 $d = 0, 3$ では体積は 0 なので, 最大は $d = \sqrt{3}$ のときである。

ここで $d = \frac{|5 - k|}{3}$ だから $\frac{|5 - k|}{3} = \sqrt{3}$ である。よって $|5 - k| = 3\sqrt{3}$ となり, 求める値は $k = 5 \pm 3\sqrt{3}$ である。

【球の切り口を底面とする円錐】



▶ 解法 2

【方針】

共有点条件は中心と平面の距離で処理する。体積の 2 乗を $u = d^2$ の式にし、3 つの正数へ相加相乗平均を用いて微分せずに最大点を決める。

【解答】

(1) 球面は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$$

であり、中心は $I = (1, 2, 0)$ 、半径は 3 である。中心から平面までの距離は

$$d = \frac{|5-k|}{3}.$$

共有点をもつ条件 $d \leq 3$ より

$$-4 \leq k \leq 14.$$

(2) 切り口の半径を ρ とすると

$$\rho^2 = 9 - d^2.$$

円錐の体積は

$$V = \frac{\pi}{3} d(9 - d^2).$$

$u = d^2$ とおくと、最大化すべき V^2 の定数を除いた部分は

$$u(9-u)^2$$

である。3 つの非負数

$$u, \quad \frac{9-u}{2}, \quad \frac{9-u}{2}$$

の和は 9 なので、相加相乗平均より

$$u \left(\frac{9-u}{2} \right)^2 \leq 3^3.$$

等号は $u = (9-u)/2$ 、すなわち $u = 3$ のときである。よって $d = \sqrt{3}$ で最大となる。したがって

$$\frac{|5-k|}{3} = \sqrt{3}$$

から

$$k = 5 \pm 3\sqrt{3}$$

を得る。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 15 分から 20 分。球と平面の位置関係は中心から平面までの距離で決まるため、平方完成と距離公式を正確に使うことが出発点である。(2) は切り口の半径と中心から平面までの距離が直角三角形を作ることに気づけば、体積は $d(9-d^2)$ の最大化になる。端点で円錐がつぶれることも確認しておく、 $d = \sqrt{3}$ が本当に最大であることを説明しやすい。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

a を正の定数とする. $f(x) = x^2 - a$ として, グラフ $y = f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする. このようにして, x_1 から順に $x_2, x_3, x_4, \dots$ を作るとき, 次の間に答えよ. ただし, $x_1 > \sqrt{a}$ とする.

- (1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ.
- (2) $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$ であることを示せ.
- (3) $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}|$ であることを示せ.
- (4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

接線の x 軸との交点を求めると, 反復式 $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ が出る. $x_n > \sqrt{a}$ を仮定して, $x_{n+1} - \sqrt{a}$ と $x_n - x_{n+1}$ をどちらも因数分解された形で表すと, 単調性と下からの評価が同時に分かる. さらに $\sqrt{a}$ との差が毎回半分より小さくなることを示し, 極限を決定する.

【解答】

(1) $f(x) = x^2 - a$ なので, 点 $(x_n, f(x_n))$ における接線の傾きは $f'(x_n) = 2x_n$ である. したがって接線の方程式は $y = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - a$ である. この接線が x 軸と交わる点では $y = 0$ だから $0 = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - a$ となる. これを x について解くと $2x_n x = x_n^2 + a$ であり, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ を得る.

(2) $x_n > \sqrt{a} > 0$ とする. このとき

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{2x_n} > 0$$

である. よって $x_{n+1} < x_n$ である.

また

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0$$

である. したがって $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$ が成り立つ. 特に, この不等式を繰り返し用いることで, すべての n について $x_n > \sqrt{a}$ である.

(3)

(2) で得た式から

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} |x_n - \sqrt{a}|$$

である. ここで $0 < x_n - \sqrt{a} < x_n$ だから $0 < \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}$ である. よって $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}|$ である.

(4)

(2) より, 数列 $\{x_n\}$ は単調減少で, しかも下から $\sqrt{a}$ でおさえられている. したがって極限を持つ. その極限を α とする.

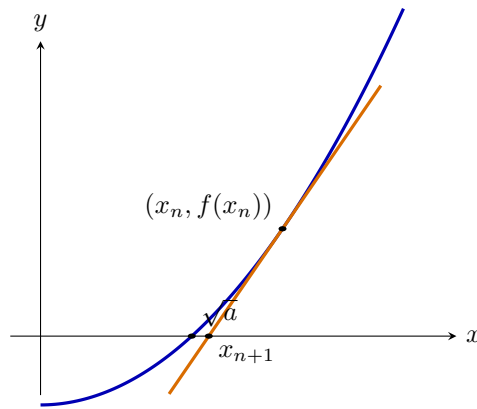
(3) を繰り返すと $0 < x_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_1 - \sqrt{a})$ である. 右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づくので, はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \sqrt{a}) = 0$$

である. したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$$

である.

【接線で $\sqrt{a}$ へ近づく反復】

▶ 解法 2

【方針】

$y_n = x_n/\sqrt{a}$ と無次元化する。さらに $u_n = (y_n - 1)/(y_n + 1)$ とおくと $u_{n+1} = u_n^2$ となり、反復の収束が明示的に分かる。

【解答】

(1) 接線と x 軸の交点を求めると

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

(2) $y_n = x_n/\sqrt{a} > 1$ とおくと

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{1}{y_n} \right).$$

ここで

$$y_{n+1} - 1 = \frac{(y_n - 1)^2}{2y_n} > 0,$$

$$y_n - y_{n+1} = \frac{y_n^2 - 1}{2y_n} > 0.$$

よって $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$ である。

(3) 上の第 1 式から

$$\frac{y_{n+1} - 1}{y_n - 1} = \frac{y_n - 1}{2y_n} < \frac{1}{2}.$$

$\sqrt{a}$ を掛ければ

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{a}|.$$

(4)

$$u_n = \frac{y_n - 1}{y_n + 1}$$

とおく。 $0 < u_1 < 1$ であり

$$u_{n+1} = \frac{y_{n+1} - 1}{y_{n+1} + 1} = \left(\frac{y_n - 1}{y_n + 1} \right)^2 = u_n^2.$$

したがって

$$u_n = u_1^{2^{n-1}} \rightarrow 0.$$

$y_n = (1 + u_n)/(1 - u_n)$ より $y_n \rightarrow 1$ である。ゆえに

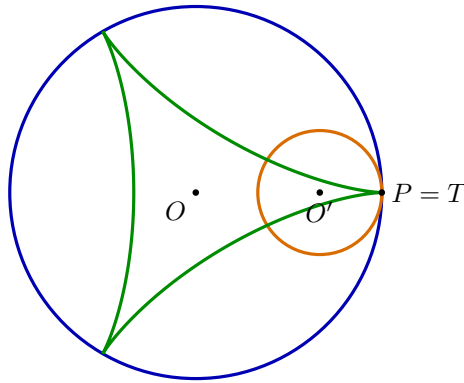
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。目安時間は 15 分から 20 分。接線の x 切片を丁寧に求めると、平方根を近似する反復式が現れる。重要なのは、 $x_{n+1} - \sqrt{a}$ を $(x_n - \sqrt{a})^2/(2x_n)$ と表す変形である。この形から x_{n+1} が $\sqrt{a}$ より大きいこと、しかも誤差が半分未満になることが一度に分かる。極限は漸化式に代入しても求められるが、本問では (3) の評価を使うと収束先まで自然につながる。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

原点 O を中心とする半径 $3a$ の円 C に半径 a の円 C' が内接して滑らないで転がって移動するものとする。円 C' の周上に固定された点 P がある。はじめ円 C' の中心 O' が $(2a, 0)$ に、また点 P が $(3a, 0)$ にあったとし、円 C' が円 C の内部を反時計まわりに 1 周してもとの位置に戻るものとする、点 P は右図に示すような軌跡を描く。次の間に答えよ。

- (1) OO' が x 軸の正の方向となす角を t とおく。円 C と円 C' の接点を T とするとき、 $\angle TO'P$ の大きさを t で表せ。また、点 P の位置 (x, y) を t を用いて表せ。
- (2) 点 P の軌跡で囲まれる図形の面積を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

内側を滑らずに転がる円なので、中心 O' は半径 $2a$ の円上を動く。外側の接点で進んだ弧の長さと内側の円が回転した弧の長さを等しくして、 $O'T$ に対する $O'P$ の回転角を求める。そこから点 P の媒介変数表示を作り、面積は閉曲線の面積公式

$$\frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt$$

を用いて計算する。

【解答】

(1)

円 C の半径は $3a$ 、円 C' の半径は a である。内接している、中心間距離は $OO' = 3a - a = 2a$ である。したがって、 OO' が x 軸の正の方向となす角を t とすると $O' = (2a \cos t, 2a \sin t)$ である。

円 C' が滑らずに転がるので、外側の円に沿って接点が進む長さと、円 C' の周上で回転した長さが等しい。中心 O' が角 t だけ動く間、接点の位置に対応する回転は $2t$ に相当し、さらに接点方向 $O'T$ 自身が角 t だけ回っている。したがって、 $O'T$ から見た $O'P$ の向き付きの回転角は $\angle TO'P = 3t$ である。

初め $t = 0$ のとき $O'P$ は x 軸の正の向きである。上の回転を座標で表すと $\overrightarrow{O'P} = a(\cos 2t, -\sin 2t)$ である。よって $P = O' + \overrightarrow{O'P}$ から $x = 2a \cos t + a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ を得る。

(2) $0 \leq t \leq 2\pi$ で 1 周分の軌跡が得られる。媒介変数表示された閉曲線の囲む面積を

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

で求める。

ここで

$$\frac{dx}{dt} = -2a \sin t - 2a \sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2a \cos t - 2a \cos 2t$$

である。したがって

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= (2a \cos t + a \cos 2t)(2a \cos t - 2a \cos 2t) \\ &\quad - (2a \sin t - a \sin 2t)(-2a \sin t - 2a \sin 2t) \\ &= 2a^2(1 - \cos 3t) \end{aligned}$$

となる。よって

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2a^2(1 - \cos 3t) dt = a^2 \left[t - \frac{1}{3} \sin 3t \right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2$$

である。したがって、求める面積は $2\pi a^2$ である。

▶ 解法 2

【方針】

軌跡を半径 $2a$ の回転ベクトルと、逆向きに 2 倍速で回る半径 a のベクトルの和と見る。面積の積分では各回転成分の寄与を分け、異なる周波数の交差項が 1 周期で消えることを使う。

【解答】

(1) 中心 O' は

$$O' = (2a \cos t, 2a \sin t)$$

を動く。滑らない条件より、小円は中心の公転角 t に対して逆向きに $2t$ 回転する。接点方向 $O'T$ の角が t 、 $O'P$ の角が $-2t$ なので

$$\angle TO'P = 3t.$$

また

$$(x, y) = 2a(\cos t, \sin t) + a(\cos 2t, -\sin 2t).$$

(2) 第 1 の回転ベクトルを U 、第 2 を W とする。閉曲線の面積は

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt.$$

U 自身の寄与は常に $4a^2$ 、 W 自身の寄与は常に $-2a^2$ である。 U, W の交差項は $\sin 3t, \cos 3t$ の定数倍となるため、1 周期の積分は 0 である。したがって

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4a^2 - 2a^2) dt = 2\pi a^2.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 25 分前後。山場は、滑らずに転がる条件から $O'P$ の向きを正しく決めるところである。中心 O' の座標だけならすぐ出るが、点 P は円 C' の回転を反映して $a(\cos 2t, -\sin 2t)$ だけずれる。面積計算では $xdy - ydx$ 型の式を展開するため、符号ミスが起こりやすい。 $1 - \cos 3t$ まで整理できれば、周期性により積分は短く終わる。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

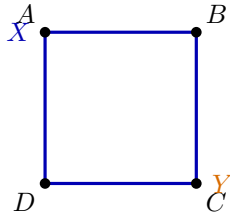
【第 4 問】

頂点が、 A, B, C, D である図のような正方形がある。点 X ははじめ頂点 A にあり、もう 1 つの点 Y ははじめ頂点 C にある。いずれの点も 1 ステップごとに等確率で隣接する頂点のどちらかに移動するものとする。次の間に答えよ。ただし $n \geq 1$ とする。

- (1) n ステップ後に点 X が頂点 A にある確率を求めよ。
- (2) n ステップ後に点 X と点 Y が共に頂点 A にある確率を求めよ。

以下の問では点 X と点 Y が同じ頂点に移動した場合には点が消滅するものとする。

- (3) n ステップの移動後にも点が存在する確率を求めよ。
- (4) n ステップの移動後に点が消滅するとき、点の寿命は $n - 1$ であるという。このとき、点の平均寿命を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

正方形の頂点を対角同士と隣接同士で分けて考える。(1)(2) は偶数ステップ後だけ A に戻れることと、偶数ステップ後には対角の 2 点に等確率でいることを使う。(3) 以降は 2 点が消滅しない限り常に対角の位置に戻ることに注目し、各ステップで消滅する確率が $1/2$ で一定であることから生存確率と平均寿命を求める。

【解答】

(1)

点 X は 1 ステップごとに隣の頂点へ移動するので、奇数ステップ後には A の隣の頂点 B, D のどちらかにあり、 A にはいない。したがって n が奇数のとき $\Pr(X_n = A) = 0$ である。

偶数ステップ後には X は A または C にいる。2 ステップ後を考えると、 A に戻る経路は $A \rightarrow B \rightarrow A$, $A \rightarrow D \rightarrow A$ の 2 通り、 C に行く経路も $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow D \rightarrow C$ の 2 通りで、いずれも等確率である。したがって偶数ステップ後には A, C に等確率でいる。よって

$$\Pr(X_n = A) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

である。

(2) n が奇数のとき、 X も Y も A にはいないので確率は 0 である。 n が偶数のとき、(1) より $\Pr(X_n = A) = \frac{1}{2}$ である。また Y は C から出発するが、同じ理由で偶数ステップ後には A, C に等確率でいるから $\Pr(Y_n = A) = \frac{1}{2}$ である。2 点の移動は互いに独立なので $\Pr(X_n = A, Y_n = A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。したがって

$$\Pr(X_n = Y_n = A) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{4} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

である。

(3)

点が消滅していないとき、2 点は常に対角の位置にある。たとえば X, Y が A, C にいるとき、次のステップで両方が B に移るか、両方が D に移れば消滅する。この確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。残りの確率 $1/2$ では、2 点は B, D という対角の位置に移り、消滅しない。他の対角の組からでも同じである。

したがって、各ステップで、それまで存在していた点が次も存在する確率は $1/2$ である。よって n ステップ後にも点が存在する確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(4)

点の寿命が $n-1$ であるとは、 $n-1$ ステップ後までは存在し、 n ステップ後に消滅することである。その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。したがって平均寿命は

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。 $m = n-1$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

である。ここで

$$\sum_{m=0}^{\infty} m r^m = \frac{r}{(1-r)^2} \quad (0 < r < 1)$$

に $r = 1/2$ を入れると

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2$$

である。よって平均寿命は 1 である。

▶ 解法 2

【方針】

1 点の位置は 2 ステップごとの 2 状態遷移で処理する。消滅問題は 2 点の相対位置を「対角」か「消滅」かの 2 状態にまとめ、生存確率の尾和から平均寿命を求める。

【解答】

(1) 奇数ステップ後には X は B, D 、偶数ステップ後には A, C にいる。2 ステップごとに A, C のどちらから出ても、次の A, C はそれぞれ確率 $1/2$ である。よって

$$\Pr(X_n = A) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ 1/2 & (n \text{ が偶数}). \end{cases}$$

(2) X, Y は独立に移動する。奇数 n では両者とも A にいない。偶数 n ではそれぞれ確率 $1/2$ で A にいるから

$$\Pr(X_n = Y_n = A) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ 1/4 & (n \text{ が偶数}). \end{cases}$$

(3) 生存中の 2 点は常に対角にいる。次の 1 歩で同じ頂点を選んで消滅する確率は $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。異なる頂点を選べば再び対角にいる。よって n 歩後の生存確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(4) 寿命を L とする。 $L \geq m$ であることは、 m ステップ後まで生存することと同値なので $\Pr(L \geq m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m$ である。非負整数値の平均を尾確率で足すと

$$E[L] = \sum_{m=1}^{\infty} \Pr(L \geq m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 1.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。前半は偶奇、後半は生存中の 2 点が常に対角にある不変量が核心である。(3) は生存率、(4) は寿命の尾確率の和で検算できる。