

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 1996 年度 理系（後期）

入試数学アーカイブ

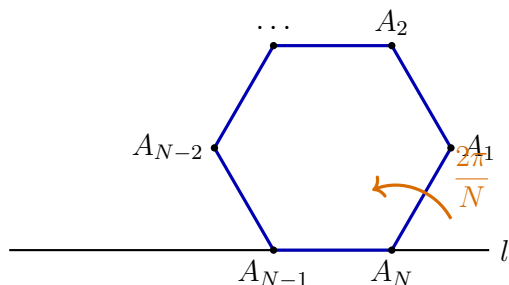
全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

図に示すように，正 N 角形 $A_1A_2\cdots A_N$ を辺 $A_{N-1}A_N$ が直線 l に重なるようにおく．正 N 角形の中心から頂点までの距離を a とする．



原資料の配置説明に基づく模式図（正 6 角形で表示）

次の問に答えよ．

- (1) 頂点 A_N を中心に，正 N 角形を左回りに滑らないように回転させ，頂点 A_1 が直線 l に重なるようにする．この回転により i 番目の頂点 A_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) が描く軌跡の長さを求めよ．
- (2) 問 (1) の操作に引き続き，直線 l 上の頂点 A_1 を中心に正 N 角形を左回りに回転させ，頂点 A_2 が直線 l と重なるようにする．このような操作を繰り返すと，正 N 角形は直線 l にそって滑らずに回転しながら移動する．正 N 角形が 1 回転するとき，頂点 A_{N-1} の描く軌跡の長さ L_N を，和の記号 Σ を用いて表せ．
- (3) $N \rightarrow \infty$ のときの長さ L_N の極限值を求めよ．

第 2 問

座標平面上の変換 $f: P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

で定める. ここで, $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする. 初期点 P_0 を原点 O にとり, 漸化式 $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n \geq 0$) により, 点列

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$$

をつくる. 次の問に答えよ.

- (1) 変換 f について, $f(U) = U$ となる点 $U(a, b)$ を求めよ. この点を変換 f の不動点という.
- (2) この不動点 U について,

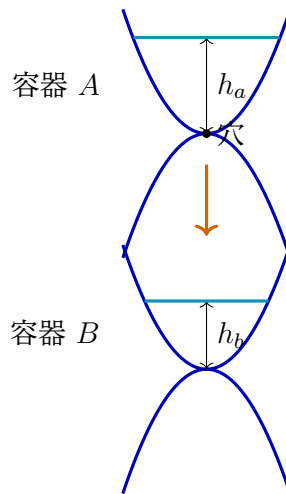
$$|\overrightarrow{UP_{n+1}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{UP_n}|, \quad \angle P_nUP_{n+1} = \alpha \quad (n \geq 0)$$

を示せ.

- (3) α を変化させたとき, 不動点 U は円の周上を動くことを示せ. また, その円の中心と半径を求めよ.
- (4) 三角形 P_nUP_{n+1} ($n \geq 0$) の面積を S_n , その総和を $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ とする. α を変化させたときの S の最大値を求めよ.

第 3 問

$y = x^2$ で表される放物線を y 軸回りに回転させて同じ形の容器を 2 つ作る．これらの容器 A , B を図に示すように，上下に配置する．容器 A の底には小さな穴があいており，底から流出した水が容器 B にたまる．時刻 $t = 0$ のとき，容器 A の水の深さは H であり，容器 B は空であった．容器 A の水の体積の減少の割合は，毎秒 kh_a (k は定数， h_a は容器 A の水の深さ) であるものと仮定する．水が容器 A から容器 B に到達するまでの時間は無視する．



原資料の配置説明に基づく模式図

次の問に答えよ．

- (1) t 秒後の容器 A の水の深さ h_a を求め， t と h_a の関係を図示せよ．
- (2) t 秒後の容器 B の水の深さ h_b を求め， t と h_b の関係を図示せよ．
- (3) 容器 A と容器 B の水面の面積の和が最大になるときの時刻 t を求めよ．

第 4 問

最初、点 Q は (x, y) 座標の原点にある。2 枚の硬貨 A, B を同時に投げて、出た結果によって点 Q を移動させていく。硬貨 A が表の場合に点 Q を x 座標の正の方向に 1 移動し、裏の場合に負の方向に 1 移動する。同様に、硬貨 B が表の場合に y 座標の正の方向に 1 移動し、裏の場合に負の方向に 1 移動するものとする。ただし硬貨 A, B を投げたとき、表の出る事象は互いに独立であり、その確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。次の問に答えよ。

- (1) 2 枚の硬貨を n 回投げたのちに、原点から点 Q までの距離が $\sqrt{2}$ 以内となる確率を求めよ。
(2) 2 枚の硬貨を n 回投げたのちに、点 Q が原点に存在する確率を p_n 、原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある確率を q_n として、次式を満足する行列 T を求めよ。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

- (3) 2 枚の硬貨を n 回投げて点 Q を移動させる。点 Q の n 回にわたる移動において、原点から点 Q までの距離が一度も $\sqrt{2}$ より大きくなならない確率を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)