

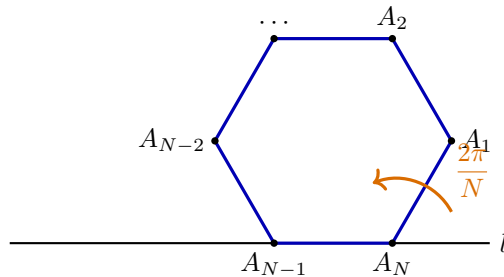
名古屋大学 1996 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

図に示すように、正 N 角形 $A_1 A_2 \cdots A_N$ を辺 $A_{N-1} A_N$ が直線 l に重なるようにおく。正 N 角形の中心から頂点までの距離を a とする。



原資料の配置説明に基づく模式図 (正 6 角形で表示)

次の問に答えよ。

- (1) 頂点 A_N を中心に、正 N 角形を左回りに滑らないように回転させ、頂点 A_1 が直線 l に重なるようにする。この回転により i 番目の頂点 A_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) が描く軌跡の長さを求めよ。
- (2) 問 (1) の操作に引き続き、直線 l 上の頂点 A_1 を中心に正 N 角形を左回りに回転させ、頂点 A_2 が直線 l と重なるようにする。このような操作を繰り返すと、正 N 角形は直線 l にそって滑らずに回転しながら移動する。正 N 角形が 1 回転するとき、頂点 A_{N-1} の描く軌跡の長さ L_N を、和の記号 $\sum$ を用いて表せ。
- (3) $N \rightarrow \infty$ のときの長さ L_N の極限値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正 N 角形が 1 つの頂点を中心に滑らずに倒れるとき、回転角は外角 $2\pi/N$ で、各頂点の軌跡はその頂点から回転中心までの距離を半径とする円弧である。頂点間の距離は、外接円の半径 a と中心角から $2a \sin(j\pi/N)$ と表せる。(2) では頂点 A_{N-1} が 1 回転の間に各頂点を中心とする回転を 1 回ずつ受けるので、円弧長を足す。(3) はその和をリーマン和として

$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

に近づける。

【解答】

(1)

正 N 角形が 1 つの頂点を中心に滑らずに回転し、隣の辺が直線 l に重なるまで動くとき、回転角は正 N 角形の外角 $\frac{2\pi}{N}$ である。

頂点 A_N を中心に回転するとき、頂点 A_i が描く軌跡は、中心 A_N 、半径 $A_N A_i$ 、中心角 $2\pi/N$ の円弧である。外接円の半径が a で、 A_N と A_i の間には $N-i$ 個分の辺の隔りがあるから $A_N A_i = 2a \sin \frac{(N-i)\pi}{N}$ である。したがって軌跡の長さは

$$\frac{2\pi}{N} \cdot 2a \sin \frac{(N-i)\pi}{N} = \frac{4\pi a}{N} \sin \frac{(N-i)\pi}{N}$$

である。

(2)

正 N 角形が 1 回転するまでには、各頂点を中心とする同じ角度 $2\pi/N$ の回転が 1 回ずつ起こる。頂点 A_{N-1} 自身を中心とする回転では軌跡の長さは 0 であり、その他の頂点を中心とする回転では、中心から A_{N-1} までの距離が

$2a \sin \frac{j\pi}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1)$ の形で一度ずつ現れる。よって

$$L_N = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^{N-1} 2a \sin \frac{j\pi}{N} = \frac{4\pi a}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{j\pi}{N}$$

である。

(3) $L_N = 4\pi a \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{j\pi}{N}$ である。ここで

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{j\pi}{N} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{j\pi}{N} \cdot \frac{\pi}{N}$$

は, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

に近づく。したがって $\lim_{N \rightarrow \infty} L_N = 4\pi a \cdot \frac{2}{\pi} = 8a$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は弦長公式から円弧長を作る。(3) では正弦の和を等比数列の虚部として厳密に求め、 L_N を余接の形にして基本極限へ帰着する。リーマン和によらない検算にもなる。

【解答】

(1)

1 回に倒れる角は外角

$$\theta = \frac{2\pi}{N}$$

である。 $A_N A_i$ は外接円の中心角 $2(N-i)\pi/N$ に対する弦だから

$$A_N A_i = 2a \sin \frac{(N-i)\pi}{N}.$$

よって円弧長は

$$\frac{4\pi a}{N} \sin \frac{(N-i)\pi}{N}.$$

(2)

1 回転の間、 A_{N-1} から回転中心までの距離として

$$2a \sin \frac{j\pi}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1)$$

が 1 回ずつ現れる。したがって

$$L_N = \frac{4\pi a}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{j\pi}{N}.$$

(3)

$\theta = \pi/N$ とする。等比数列の和

$$\sum_{j=1}^{N-1} e^{ij\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

で $e^{iN\theta} = -1$ を用い、その虚部を取ると

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{j\pi}{N} = \cot \frac{\pi}{2N}.$$

よって

$$L_N = \frac{4\pi a}{N} \cot \frac{\pi}{2N} = 8a \left\{ \frac{\pi}{2N} \cot \frac{\pi}{2N} \right\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = 1$$

だから

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N = 8a.$$

【総評】 転がる正多角形の頂点軌跡を、円弧長の和として数える問題である。難易度は 6，計算量は 5 程度で，想定時間は 18 分前後。回転角が毎回外角 $2\pi/N$ であること，頂点間距離を $2a \sin(j\pi/N)$ と表すことが中心である。(2) では頂点 A_{N-1} が各頂点を中心とする回転を一度ずつ受ける，という数え上げを丁寧に書くといよい。(3) はリーマン和で十分だが，三角関数の和で検算できる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 2 問】

座標平面上の変換 $f: P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

で定める。ここで、 $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする。初期点 P_0 を原点 O にとり、漸化式 $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n \geq 0$) により、点列

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$$

をつくる。次の問に答えよ。

- (1) 変換 f について、 $f(U) = U$ となる点 $U(a, b)$ を求めよ。この点を変換 f の不動点という。
- (2) この不動点 U について、

$$|\overrightarrow{UP_{n+1}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{UP_n}|, \quad \angle P_n U P_{n+1} = \alpha \quad (n \geq 0)$$

を示せ。

- (3) α を変化させたとき、不動点 U は円の周上を動くことを示せ。また、その円の中心と半径を求めよ。
- (4) 三角形 $P_n U P_{n+1}$ ($n \geq 0$) の面積を S_n ，その総和を $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ とする。 α を変化させたときの S の最大値を

求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

不動点 U は $U = \frac{1}{2}AU + (1, 0)$ を解いて求める。以後は U を基準に見ると，変換 f は「角 α の回転」と「長さを $1/2$ にする縮小」を同時に行うだけになる。(3) では不動点方程式を $U - (1, 0) = \frac{1}{2}AU$ と見て，回転では長さが変わらないことから $|U - (1, 0)| = |U|/2$ を得て円に直す。(4) では三角形の面積を $|UP_n|$ ， $|UP_{n+1}|$ ， $|\sin \alpha|$ で表し，等比級数を足してから α で最大化する。

【解答】

(1) $c = \cos \alpha$ ， $s = \sin \alpha$ とおく。不動点 $U(a, b)$ は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。両辺を 2 倍して整理すると

$$\begin{pmatrix} 2-c & s \\ -s & 2-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。係数行列の行列式は $(2-c)^2 + s^2 = 5-4c > 0$ なので， $a = \frac{2(2-c)}{5-4c}$ ， $b = \frac{2s}{5-4c}$ である。すなわち

$$U = \left(\frac{2(2-\cos \alpha)}{5-4\cos \alpha}, \frac{2\sin \alpha}{5-4\cos \alpha} \right)$$

である。

(2)

不動点の式 $U = f(U)$ と $P_{n+1} = f(P_n)$ を引き算すると $\overrightarrow{UP_{n+1}} = \frac{1}{2}A\overrightarrow{UP_n}$ である。行列 A は角 α の回転を表すので、長さを変えず、向きを α だけ回転させる。したがって $|\overrightarrow{UP_{n+1}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{UP_n}|$ であり、また $\angle P_nUP_{n+1} = \alpha$ である。

(3) $U = (x, y)$ とする。不動点方程式は $U - (1, 0) = \frac{1}{2}AU$ と書ける。回転行列 A は長さを変えないので $|U - (1, 0)| = \frac{1}{2}|U|$ である。したがって $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ となる。整理すると $3x^2 - 8x + 3y^2 + 4 = 0$ であり、平方完成して $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ を得る。よって不動点 U は、中心 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ 半径 $\frac{2}{3}$ の円周上を動く。

(4)

(2) より $|UP_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |UP_0|$ である。 $P_0 = O$ だから $|UP_0| = |U|$ である。三角形 P_nUP_{n+1} の面積は $S_n = \frac{1}{2}|UP_n||UP_{n+1}|\sin\alpha$ なので $S_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |U|^2 \sin\alpha$ である。したがって

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n = |U|^2 \sin\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{|U|^2 \sin\alpha}{3}$$

となる。

(1) の座標から $|U|^2 = \frac{4\{(2-c)^2 + s^2\}}{(5-4c)^2} = \frac{4}{5-4c} = \frac{1}{5/4-c}$ である。よって $S = \frac{|\sin\alpha|}{3(5/4 - \cos\alpha)}$ である。 $|\sin\alpha|$ があるので、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ で最大を考えればよい。 $x = \cos\alpha$ とおくと、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ では $S = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3(5/4-x)}$ ($-1 \leq x \leq 1$) である。最大値を求めるため、正の量 $\frac{1-x^2}{(5/4-x)^2}$ を最大化する。微分すると

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1-x^2}{(5/4-x)^2} \right\} = \frac{2(1-5x/4)}{(5/4-x)^3}$$

であるから、最大は $x = \frac{4}{5}$ のときである。このとき $\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{5}$, $\frac{5}{4} - x = \frac{9}{20}$ なので $S_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3/5}{9/20} = \frac{4}{9}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ で表す。変換を $z \mapsto rz + 1$, $r = e^{i\alpha}/2$ と書けば、不動点・らせん・軌跡・面積級数が同じ 1 本の式から得られる。

【解答】

(1)

$z = x + iy$, $r = e^{i\alpha}/2$ とおくと変換は

$$f(z) = rz + 1$$

である。不動点 u は

$$u = ru + 1$$

より

$$u = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{2-e^{i\alpha}}.$$

分母を実数化すると

$$u = \frac{2(2 - \cos\alpha) + 2i\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}.$$

よって

$$U = \left(\frac{2(2 - \cos\alpha)}{5 - 4\cos\alpha}, \frac{2\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha} \right).$$

(2)

$$z_{n+1} - u = r(z_n - u).$$

したがって絶対値は $1/2$ 倍、偏角は α だけ増える。よって

$$|UP_{n+1}| = \frac{1}{2}|UP_n|, \quad \angle P_nUP_{n+1} = \alpha.$$

(3)

$u - 1 = ru$ から

$$|u - 1| = \frac{1}{2}|u|.$$

$u = x + iy$ として平方すると

$$(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

整理して

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}.$$

中心は $(4/3, 0)$ 、半径は $2/3$ である。

(4)

$$z_n - u = r^n(z_0 - u) = -r^n u$$

なので

$$|UP_n| = \frac{|u|}{2^n}.$$

したがって

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{|u|}{2^n} \cdot \frac{|u|}{2^{n+1}} |\sin \alpha| = \frac{|u|^2 |\sin \alpha|}{4^{n+1}}.$$

ゆえに

$$S = \frac{|u|^2 |\sin \alpha|}{3}.$$

また

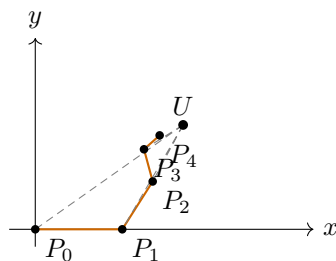
$$|u|^2 = \frac{4}{5 - 4 \cos \alpha}.$$

$c = \cos \alpha$ として S^2 を最大化すると

$$S^2 = \frac{16(1 - c^2)}{9(5 - 4c)^2}$$

は $c = 4/5$ で最大となる。よって

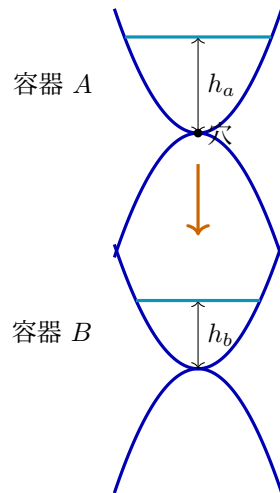
$$S_{\max} = \frac{4}{9}.$$



【総評】 縮小回転の不動点、軌跡、面積級数をまとめて扱う総合問題である。難易度は 7、計算量は 6 程度で、想定時間は 25 分前後。(1) の連立一次方程式は分母 $5 - 4 \cos \alpha$ が常に正であることを確認する。(2) 以降は不動点を基準に見ると構造が一気に簡単になる。(3) は座標式を直接消去するより、 $|U - (1, 0)| = |U|/2$ と見ると円が自然に出る。(4) は面積の等比級数と最後の最大化で計算ミスが出やすいので、 $|U|^2 = 4/(5 - 4 \cos \alpha)$ を丁寧に確認したい。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 3 問】

$y = x^2$ で表される放物線を y 軸回りに回転させて同じ形の容器を 2 つ作る. これらの容器 A, B を図に示すように, 上下に配置する. 容器 A の底には小さな穴があいており, 底から流出した水が容器 B にたまる. 時刻 $t = 0$ のとき, 容器 A の水の深さは H であり, 容器 B は空であった. 容器 A の水の体積の減少の割合は, 毎秒 kh_a (k は定数, h_a は容器 A の水の深さ) であるものと仮定する. 水が容器 A から容器 B に到達するまでの時間は無視する.



原資料の配置説明に基づく模式図

次の問に答えよ.

- (1) t 秒後の容器 A の水の深さ h_a を求め, t と h_a の関係を図示せよ.
- (2) t 秒後の容器 B の水の深さ h_b を求め, t と h_b の関係を図示せよ.
- (3) 容器 A と容器 B の水面の面積の和が最大になるときの時刻 t を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

放物線 $y = x^2$ を y 軸まわりに回転した容器では, 深さ h の水面半径が $\sqrt{h}$ なので, 水の体積は $V(h) = \pi h^2/2$ である.

(1) は $dV/dt = -kh_a$ と $dV/dh = \pi h$ から h_a が直線的に減ることを出す. (2) は容器 A から減った体積がそのまま容器 B に入るので $h_a^2 + h_b^2 = H^2$ を使う. (3) は水面積が $\pi h_a + \pi h_b$ であり, $h_a^2 + h_b^2 = H^2$ のもとで和が最大になる条件を調べる.

【解答】

深さ h まで水が入っているとき, 水面の高さは $y = h$ であり, 放物線 $y = x^2$ から水面の半径は $\sqrt{h}$ である. したがって高さ y における断面積は πy で, 体積は

$$V(h) = \int_0^h \pi y \, dy = \frac{\pi h^2}{2}$$

である.

(1)

容器 A の水の体積は $V(h_a) = \pi h_a^2/2$ である. 水の体積の減少の割合が毎秒 kh_a だから, 水が残っている間は $\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi h_a^2}{2} \right) = -kh_a$ である. 左辺は $\pi h_a \, dh_a/dt$ なので, $h_a > 0$ の間 $\pi h_a \frac{dh_a}{dt} = -kh_a$ より $\frac{dh_a}{dt} = -\frac{k}{\pi}$ である. 初期条件 $h_a(0) = H$ から $h_a = H - \frac{k}{\pi}t$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi H}{k} \right)$ である. $t \geq \pi H/k$ では容器 A は空なので $h_a = 0$ である. グラフは $(0, H)$ から $(\pi H/k, 0)$ までの線分と, その後の t 軸上の半直線である.

(2)

時刻 t までに容器 A から流れ出た水の体積は $\frac{\pi H^2}{2} - \frac{\pi h_a^2}{2}$ である. これが容器 B にたまった水の体積 $\frac{\pi h_b^2}{2}$ に等しいので

$h_b^2 = H^2 - h_a^2$ である。したがって $h_b = \sqrt{H^2 - h_a^2}$ であり, (1) を代入して

$$h_b = \sqrt{H^2 - \left(H - \frac{k}{\pi}t\right)^2} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi H}{k}\right)$$

である。 $t \geq \pi H/k$ ではすべての水が容器 B に入っているので $h_b = H$ である。グラフは $(0, 0)$ から $(\pi H/k, H)$ まで増加し, その後は高さ H で一定となる。

(3)

深さ h の水面半径は $\sqrt{h}$ だから, 水面の面積は πh である。したがって二つの容器の水面の面積の和は $\pi h_a + \pi h_b = \pi(h_a + h_b)$ である。

また水量保存より $h_a^2 + h_b^2 = H^2$ である。 $h_a, h_b \geq 0$ のもとで $h_a + h_b$ を最大にするには $(h_a - h_b)^2 \geq 0$ より $h_a^2 + h_b^2 \geq 2h_a h_b$ を用いる。すると $(h_a + h_b)^2 = h_a^2 + h_b^2 + 2h_a h_b \leq 2(h_a^2 + h_b^2) = 2H^2$ であり, 等号は $h_a = h_b$ のときに成り立つ。よって最大時には $h_a = h_b = \frac{H}{\sqrt{2}}$ である。

(1) の式から $H - \frac{k}{\pi}t = \frac{H}{\sqrt{2}}$ となるので, 求める時刻は $t = \frac{\pi H}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

高さと時間を無次元化する。体積保存を単位円 $u^2 + v^2 = 1$ 上の運動として捉え、 $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$ とおけば 2 つの水深グラフと水面積の最大条件を同時に読める。

【解答】

(1)

深さ h のとき、水面半径は $\sqrt{h}$ なので

$$V(h) = \int_0^h \pi y \, dy = \frac{\pi h^2}{2}.$$

したがって

$$\pi h_a \frac{dh_a}{dt} = -k h_a.$$

水が残る間は

$$\frac{dh_a}{dt} = -\frac{k}{\pi}.$$

無次元時間

$$\tau = \frac{kt}{\pi H}$$

を導入すると

$$\frac{h_a}{H} = 1 - \tau \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

よって

$$h_a = \max\left(H - \frac{k}{\pi}t, 0\right).$$

(2)

体積保存より

$$h_a^2 + h_b^2 = H^2.$$

$$u = \frac{h_a}{H}, \quad v = \frac{h_b}{H}$$

とおけば

$$u^2 + v^2 = 1, \quad u, v \geq 0.$$

したがって $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$ と書ける。さらに $u = 1 - \tau$ だから

$$h_b = H \sqrt{1 - (1 - \tau)^2} = \sqrt{H^2 - \left(H - \frac{k}{\pi}t\right)^2}$$

である。これは $0 \leq \tau \leq 1$ で増加し、その後は H で一定である。

(3)

水面積の和は

$$\pi(h_a + h_b) = \pi H(u + v) = \pi H(\cos \theta + \sin \theta).$$

$$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

より、最大は $\theta = \pi/4$ 、すなわち

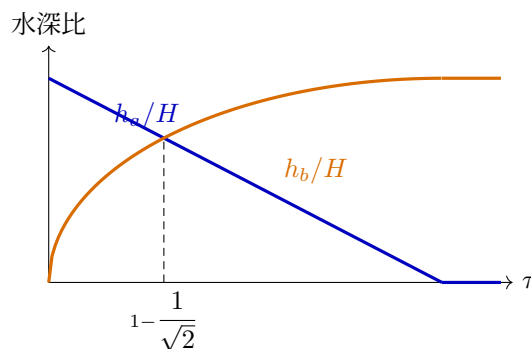
$$u = v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

のときである。 $u = 1 - \tau$ を用いると

$$\tau = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって求める時刻は

$$t = \frac{\pi H}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$



【総評】 回転放物面容器の体積と水面積を結びつける問題である。難易度は 6，計算量は 5 程度で，想定時間は 18 分前後。最初に $V(h) = \pi h^2/2$ を作ると，流出条件から h_a が一次関数になる。(2) は体積保存を $h_a^2 + h_b^2 = H^2$ と読めるかが中心である。(3) では水面積が πh であって体積ではない点に注意し，和の最大が $h_a = h_b$ で起こることを不等式で示すと答案が明確になる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 4 問】

最初、点 Q は (x, y) 座標の原点にある。2 枚の硬貨 A, B を同時に投げて、出た結果によって点 Q を移動させていく。硬貨 A が表の場合に点 Q を x 座標の正の方向に 1 移動し、裏の場合に負の方向に 1 移動する。同様に、硬貨 B が表の場合に y 座標の正の方向に 1 移動し、裏の場合に負の方向に 1 移動するものとする。ただし硬貨 A, B を投げたとき、表の出る事象は互いに独立であり、その確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。次の問に答えよ。

- (1) 2 枚の硬貨を n 回投げたのちに、原点から点 Q までの距離が $\sqrt{2}$ 以内となる確率を求めよ。
- (2) 2 枚の硬貨を n 回投げたのちに、点 Q が原点に存在する確率を p_n ，原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある確率を q_n として、次式を満足する行列 T を求めよ。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

- (3) 2 枚の硬貨を n 回投げて点 Q を移動させる。点 Q の n 回にわたる移動において、原点から点 Q までの距離が一度も $\sqrt{2}$ より大きくならない確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各回の移動は $(\pm 1, \pm 1)$ の 4 通りで等確率であり、 x 座標と y 座標は独立な 1 次元移動として数えられる。(1) は n の偶奇で到達できる格子点の偶奇が変わるため、半径 $\sqrt{2}$ 以内にある点を偶数時は原点、奇数時は $(\pm 1, \pm 1)$ と分けて数える。(2)(3) は「途中で半径 $\sqrt{2}$ を超えない経路」を数えるため、原点にいる場合と円周上にいる場合だけを追う。問題文の (2) を無条件確率として読むと一定の行列 T は存在しないため、(3) につながる制限付きの確率として扱う。

【解答】

(1) n 回投げた後の x 座標は、硬貨 A で表が出た回数を r とすると $r - (n - r) = 2r - n$ である。したがって x 座標は n と同じ偶奇をもつ。 y 座標も同様である。 n が偶数のとき、 x, y はともに偶数である。原点からの距離が $\sqrt{2}$ 以内となる偶数格子点は原点だけである。よって

$$P(Q = (0, 0)) = \frac{n C_{n/2}}{2^n} \cdot \frac{n C_{n/2}}{2^n}$$

であり、求める確率は $\left(\frac{n C_{n/2}}{2^n}\right)^2$ である。 n が奇数のとき、 x, y はともに奇数である。距離が $\sqrt{2}$ 以内となる点は $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ の 4 点である。1 つの座標が 1 または -1 になる確率は

$$\frac{n C_{(n+1)/2} + n C_{(n-1)/2}}{2^n} = \frac{2n C_{(n+1)/2}}{2^n}$$

である。したがって求める確率は $\left(\frac{2n C_{(n+1)/2}}{2^n}\right)^2$ である。

(2)

ここでは (3) で用いるため、途中で原点からの距離が $\sqrt{2}$ より大きくならない経路だけを数え、そのうち時刻 n に原点にある確率を p_n 、半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある確率を q_n として扱う。この解釈でなければ、外側から円周上へ戻る経路もあるため、 p_n, q_n だけで次の p_{n+1}, q_{n+1} は決まらない。

原点から 1 回移動すると、必ず $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ のいずれかに移る。したがって原点から円周上へ移る確率は 1 である。

一方、円周上の 4 点のどれかにいるとする。次も半径 $\sqrt{2}$ 以内にとどまるには、原点へ戻るしかない。例えば $(1, 1)$ から、4 通りの移動先のうち原点は $(0, 0)$ の 1 通りだけである。したがって円周上から原点へ戻る確率は $\frac{1}{4}$ である。

よって $p_{n+1} = \frac{1}{4}q_n$, $q_{n+1} = p_n$ であり、

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(3)

距離が一度も $\sqrt{2}$ より大きくならないためには、点 Q は原点と円周上の 4 点を交互に動くしかない。原点から円周上へ出る移動は必ず条件を満たし、円周上から条件を満たして次へ進むには確率 $1/4$ で原点へ戻る必要がある。

したがって 2 回の移動を 1 組として見ると、条件を保ったまま 原点 $\rightarrow$ 円周上 $\rightarrow$ 原点 と戻る確率は $\frac{1}{4}$ である。 $n = 2m$

のときは、この 2 回 1 組が m 回必要なので、求める確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^m$ である。 $n = 2m + 1$ のときは、 m 組を終えた後、最後

に原点から円周上へ 1 回移る。この最後の移動は必ず条件を満たすので、やはり確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^m$ である。

よって一般に $\left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は各座標の 1 次元移動を直接数える。(2) は原文を文字どおり読んだ場合の矛盾を初期数項で検証し、(3) と整合する制限付き状態確率に読み替えた行列を示す。(3) は 2 回ごとの移動列を直接数える。

【解答】

(1)

n が偶数なら、半径 $\sqrt{2}$ 以内で到達可能な点は原点だけである。各座標が 0 となる確率は

$$\frac{{}_nC_{n/2}}{2^n}$$

だから、独立性より

$$\left(\frac{{}_nC_{n/2}}{2^n}\right)^2.$$

n が奇数なら到達可能な点は $(\pm 1, \pm 1)$ の 4 点である。1 座標が ± 1 のいずれかとなる確率は

$$\frac{2{}_nC_{(n+1)/2}}{2^n}.$$

したがって求める確率は

$$\left(\frac{2{}_nC_{(n+1)/2}}{2^n}\right)^2.$$

(2)

原文の p_n, q_n を「途中の位置を問わない無条件確率」と文字どおり読むと、一定行列 T は存在しない。実際、

$$(p_0, q_0) = (1, 0), \quad (p_1, q_1) = (0, 1), \quad (p_2, q_2) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

から、もし一定行列があるなら

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に限られる。しかしこの行列は $q_3 = 1/4$ を与える一方、無条件確率の実値は

$$q_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

であり矛盾する。

そこで (3) への誘導として、「時刻 n まで一度も円外へ出ていない経路」のうち原点にある確率を p_n 、円周上にある確率を q_n と読む。原点からは確率 1 で円周上へ移り、円周上から条件を保てるのは確率 $1/4$ で原点へ戻る場合だけである。よって

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

この出題意図上の解釈では

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)

条件を保つには、偶数回目の移動で直前の移動をちょうど打ち消して原点へ戻らなければならない。2 回を 1 組にすると、第 1 歩は 4 通り自由、第 2 歩はその逆向きの 1 通りだけである。したがって 1 組が条件を満たす確率は

$$\frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}.$$

$n = 2m$ でも $n = 2m + 1$ でも、制約を受ける完全な 2 歩組は m 組である。よって

$$\left(\frac{1}{4}\right)^m = \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

【総評】 2次元の独立な移動を、偶奇と半径 $\sqrt{2}$ 以内の格子点で分類する問題である。難易度は6、計算量は5程度で、想定時間は20分前後。(1)は時刻の偶奇で到達できる点が変わるため、偶数時と奇数時を分ける必要がある。(2)の文面は無条件確率にも読めるが、その解釈では外側から円周上へ戻る経路があり、 p_n, q_n だけで次が決まらない。したがって(3)に接続する「一度も外へ出ていない経路」の原点・円周上の確率として読むのが自然である。(3)は円周上から原点へ戻る確率 $1/4$ が何回必要かを数えればよい。2解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。特に第(2)問は、無条件確率なら一定行列が存在しないことを初期数項で検証し、出題意図上の制限付き確率との違いを明示した。