

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2000 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

下図に示すように、 y 軸上の点 $A(0, a)$ に中心を持つ半径 a (> 0) の円 $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ がある。この円の $|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$ を満たす円弧 BC に、直線 $y = a$ 上の $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ を満たす任意の点 $P(t, a)$ から y 軸に平行に円弧に下ろした直線が円弧 BC と交わる点を Q とする。つぎに、線分 QA に関して $\angle PQA = \angle AQS$ となるように点 Q から引いた直線と y 軸との交点を $S(0, s)$ とする。

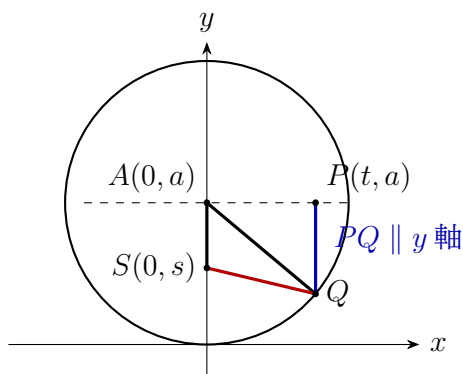
つぎの問に答えよ。

(1) 点 S の y 座標 s を t の関数として導け。

(2) 前問において $X = \frac{t}{a}$, $Y = \frac{a}{a-s}$ とおく。 X と Y の関係を求めよ。

また、点 P の x 座標 t を $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ の範囲で変化させたとき、点 (X, Y) が描く軌跡を図示せよ。

(3) 線分 PQ と線分 QS の長さの和を L とする。 L の最小値を与える t の値とそのときの L の値を求めよ。



第 2 問

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, 複素数 z_n から新しい複素数 z_{n+1} をつぎのように定義する.

$$z_{n+1} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(z_n + E\bar{z}_n)$$

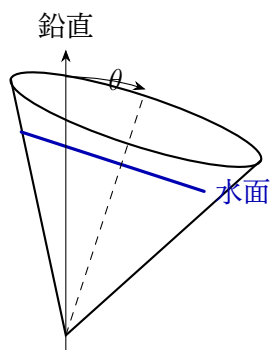
ここで, $\bar{z}$ は複素数 z に共役な複素数を表し, 実数 E, α はそれぞれ $E > 1, 0 < \alpha < \pi$ とする.

複素数 z_0 の絶対値が 1 であるとして, つぎの問に答えよ.

- (1) z_1 が z_0 の実数倍になるような z_0 が存在することを示せ.
- (2) (1) の条件を満たすどの z_0 に対しても, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$ となる E の範囲を α で表せ.

第 3 問

直線 $y = x$ ($0 \leq x \leq a$) を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器がある．回転軸を鉛直にしてこの容器に水をいっぱいに満たした後，右図のように，静かに θ ラジアン傾けて水を出し，そのままに保った．このときの容器内の水面の面積 $S(\theta)$ を求めよ．



第 4 問

あるトーナメント形式（注）の競技大会に、 2^n 人の選手が参加し、そのうち 2^m 人は強い選手であり、残りは弱い選手であるとする。ただし、 n, m は自然数であり $n > m$ とする。強い選手同士は $(n - m)$ 回戦が終わるまでは対戦することがないように、組み合わせが決められているものとする。また、強い選手が弱い選手に勝つ確率が $x \left(> \frac{1}{2} \right)$ であるとし、強い選手同士および弱い選手同士はいずれも勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であるとする。つぎの問に答えよ。

- (1) $n = 3, m = 1$ として、ある特定の強い選手が優勝する確率を求めよ。
- (2) ある特定の強い選手が 1 回戦から i 回戦まで連続して勝つ確率を p_i とする。
 - (a) $n = 3, m = 2$ のとき、 p_3 を p_2 と x を用いて表せ。
 - (b) 任意の n, m に対して、 $i = n - m$ および $i = n$ のそれぞれの場合について、 p_i を p_{i-1} と x を用いて表せ。

（注）トーナメント形式： 2^n 人を 2 人ずつの 2^{n-1} 組に分けて 1 回戦を行い、敗者を除外して、その後同様に 2 回戦、3 回戦と対戦を進め、最後に残った 2 者で優勝を決定する形式。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)