

名古屋大学 2000 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

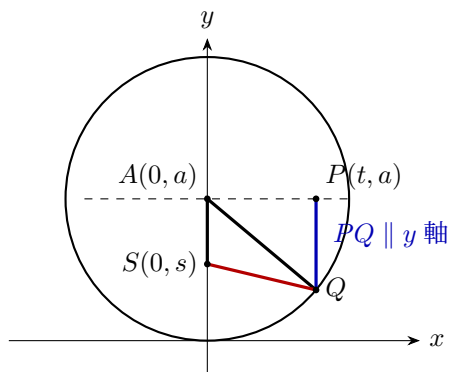
下図に示すように、 y 軸上の点 $A(0, a)$ に中心を持つ半径 $a (> 0)$ の円 $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ がある。この円の $|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$ を満たす円弧 BC に、直線 $y = a$ 上の $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ を満たす任意の点 $P(t, a)$ から y 軸に平行に円弧に下ろした直線が円弧 BC と交わる点を Q とする。つぎに、線分 QA に関して $\angle PQA = \angle AQS$ となるように点 Q から引いた直線と y 軸との交点を $S(0, s)$ とする。

つぎの問に答えよ。

- (1) 点 S の y 座標 s を t の関数として導け。
- (2) 前問において $X = \frac{t}{a}$, $Y = \frac{a}{a-s}$ とおく。 X と Y の関係を求めよ。

また、点 P の x 座標 t を $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ の範囲で変化させたとき、点 (X, Y) が描く軌跡を図示せよ。

- (3) 線分 PQ と線分 QS の長さの和を L とする。 L の最小値を与える t の値とそのときの L の値を求めよ。



▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

円弧上の点 Q は、 $h = \sqrt{a^2 - t^2}$ とおけば $Q = (t, a - h)$ と表せる。 QS は QA に関して QP を反射した方向なので、単位ベクトルの反射公式で方向を出し、 y 軸との交点から s を求める。無次元量 $X = t/a$, $Y = a/(a - s)$ に直すと楕円 $X^2 + Y^2/4 = 1$ の一部になる。長さは $PQ = h$, $QS = a^2/(2h)$ となるので、 $h + a^2/(2h)$ を最小化する。

【解答】

(1) $h = \sqrt{a^2 - t^2}$ とおく。点 Q は円 $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ 上にあり、 $P(t, a)$ から y 軸に平行に下ろした点であるから $Q = (t, a - h)$ である。 Q から見たベクトルは $\overrightarrow{QP} = (0, h)$, $\overrightarrow{QA} = (-t, h)$ である。 $|QA| = a$ なので、 QA 方向の単位ベクトルは $\vec{u} = \left(-\frac{t}{a}, \frac{h}{a}\right)$ である。また QP 方向の単位ベクトルは $(0, 1)$ である。これを QA に関して反射した方向ベクトルは

$$2\{(0, 1) \cdot \vec{u}\} \vec{u} - (0, 1) = \left(-\frac{2th}{a^2}, \frac{2h^2}{a^2} - 1\right)$$

である。

したがって直線 QS は $(t, a - h) + \lambda \left(-\frac{2th}{a^2}, \frac{2h^2}{a^2} - 1\right)$ と表される。 y 軸との交点では $x = 0$ だから $t - \lambda \frac{2th}{a^2} = 0$ より $\lambda = \frac{a^2}{2h}$ である。よって $S = (0, s)$ の y 座標は $s = a - h + \frac{a^2}{2h} \left(\frac{2h^2}{a^2} - 1\right) = a - \frac{a^2}{2h}$ である。すなわち $s = a - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - t^2}}$ である。

(2) (1) より $a - s = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - t^2}}$ である。したがって

$$Y = \frac{a}{a-s} = \frac{2\sqrt{a^2 - t^2}}{a} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}$$

である。 $X = t/a$ だから $Y = 2\sqrt{1-X^2}$ であり、両辺を 2 乗して $X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$ を得る。

また $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ より $0 < |X| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。このとき $Y = 2\sqrt{1-X^2}$ だから $1 \leq Y < 2$ である。したがって軌跡は、楕円 $X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$ の上半分のうち、 $0 < |X| \leq \sqrt{3}/2$ に対応する左右 2 本の弧であり、 $(0, 2)$ は含まず、 $(\pm\sqrt{3}/2, 1)$ は含む。

(3) $PQ = h$ である。また (1) の反射方向ベクトルは単位ベクトルなので、 QS の長さは、上で得たパラメータ値 $\lambda = \frac{a^2}{2h}$ に等しい。したがって $L = PQ + QS = h + \frac{a^2}{2h}$ である。ここで $0 < |t| \leq \sqrt{3}a/2$ より $\frac{a}{2} \leq h < a$ である。 $h > 0$ として $L(h) = h + \frac{a^2}{2h}$ を考えると $L'(h) = 1 - \frac{a^2}{2h^2}$ である。したがって最小は $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ で取られる。この値は $[a/2, a)$ に入っている。よって $\sqrt{a^2 - t^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ から $t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ であり、そのとき $L_{\min} = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2(a/\sqrt{2})} = \sqrt{2}a$ である。

▶ 解法 2 (角の反射と相加相乗平均)

【方針】

QA を軸として半直線 QP を反射し、その方向角の正弦・余弦から QS の傾きを求める。軌跡は無次元化して楕円に直し、長さの最小化は微分ではなく相加相乗平均を使う。

【解答】

(1)

$$h = \sqrt{a^2 - t^2}$$

とおけば $Q = (t, a - h)$ である。 QA の単位方向は

$$\left(-\frac{t}{a}, \frac{h}{a}\right).$$

鉛直上向きの単位ベクトル $(0, 1)$ をこの直線に関して反射すると

$$\left(-\frac{2th}{a^2}, \frac{2h^2}{a^2} - 1\right).$$

これが QS の単位方向である。 $x = t$ から $x = 0$ まで進む長さは

$$QS = \frac{a^2}{2h}.$$

そのときの y 座標を計算すると

$$s = a - \frac{a^2}{2h} = a - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

(2)

$$X = \frac{t}{a}, \quad Y = \frac{a}{a-s} = \frac{2h}{a}$$

だから

$$X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

範囲は

$$0 < |X| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1 \leq Y < 2.$$

よって上半楕円の左右 2 本の弧で、 $(0, 2)$ は除き、 $(\pm\sqrt{3}/2, 1)$ は含む。

(3)

$$L = h + \frac{a^2}{2h}.$$

相加相乗平均より

$$L \geq 2\sqrt{h \cdot \frac{a^2}{2h}} = \sqrt{2}a.$$

等号は $h = a^2/(2h)$ 、すなわち $h = a/\sqrt{2}$ のとき。これは許された範囲に入るので

$$t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad L_{\min} = \sqrt{2}a.$$

【総評】 難度 8、計算量 8。角の反射を単位ベクトルで表し、交点 S、無次元軌跡、長さ最小化を一続きで導いた。楕円の端点包含と除外点を図示し、最小値は微分と相加相乗平均の両方で等号条件を確認した。2つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 2 問】

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、複素数 z_n から新しい複素数 z_{n+1} をつぎのように定義する。

$$z_{n+1} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(z_n + E\bar{z}_n)$$

ここで、 $\bar{z}$ は複素数 z に共役な複素数を表し、実数 E 、 α はそれぞれ $E > 1$ 、 $0 < \alpha < \pi$ とする。

複素数 z_0 の絶対値が 1 であるとして、つぎの問に答えよ。

- (1) z_1 が z_0 の実数倍になるような z_0 が存在することを示せ。
- (2) (1) の条件を満たす z_0 に対しても、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$ となる E の範囲を α で表せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

$|z_0| = 1$ なので $z_0 = e^{i\phi}$ とおく。 z_1 が z_0 の実数倍になる条件は、ある実数 λ で $z_1 = \lambda z_0$ と書けること、すなわち $1 + Ee^{-2i\phi} = \lambda e^{-i\alpha}$ である。これは中心 1、半径 E の円と原点を通る直線の交点の存在で示せる。(2) では可能な倍率 λ の 2 根がすべて $|\lambda| < 1$ である条件を、2 次方程式 $|\lambda e^{-i\alpha} - 1| = E$ から求める。

【解答】

(1) $|z_0| = 1$ なので $z_0 = e^{i\phi}$ とおく。すると $\bar{z}_0 = e^{-i\phi}$ であり、

$$z_1 = e^{i\alpha}(e^{i\phi} + Ee^{-i\phi}) = e^{i\phi}e^{i\alpha}(1 + Ee^{-2i\phi})$$

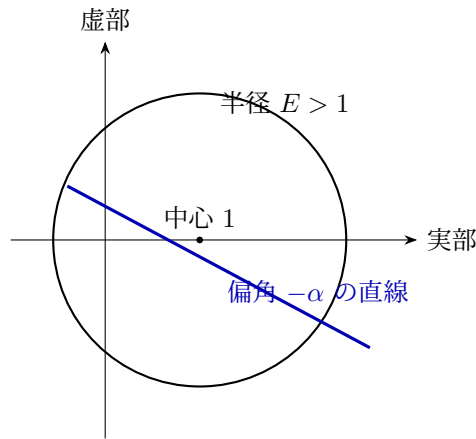
である。 z_1 が z_0 の実数倍であるとは、ある実数 λ に対して $z_1 = \lambda z_0$ となることである。上の式から、これは $e^{i\alpha}(1 + Ee^{-2i\phi}) = \lambda$ すなわち $1 + Ee^{-2i\phi} = \lambda e^{-i\alpha}$ と同値である。

左辺 $1 + Ee^{-2i\phi}$ は、 ϕ が動くとき中心 1、半径 E の円周を動く。 $E > 1$ なので、この円は原点を内部に含む。したがって原点を通り偏角 $-\alpha$ の方向をもつ直線とこの円は 2 点で交わる。交点に対応する ϕ を取れば、上の等式を満たす実数 λ が存在する。よってそのような z_0 は存在する。

(2) (1) の条件を満たす z_0 について $z_1 = \lambda z_0$ と書ける。 λ は実数である。このとき $z_{n+1} = e^{i\alpha}(z_n + E\bar{z}_n)$ において、もし $z_n = \lambda^n z_0$ なら λ が実数であることから $z_{n+1} = \lambda^n e^{i\alpha}(z_0 + E\bar{z}_0) = \lambda^{n+1} z_0$ となる。したがって $z_n = \lambda^n z_0$ である。よって $|z_n| \rightarrow 0$ となるための必要十分条件は、(1) で可能なすべての λ について $|\lambda| < 1$ である。 λ は $1 + Ee^{-2i\phi} = \lambda e^{-i\alpha}$ を満たすので $|\lambda e^{-i\alpha} - 1| = E$ である。これを 2 乗すると $(\lambda \cos \alpha - 1)^2 + (\lambda \sin \alpha)^2 = E^2$ より $\lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1 = E^2$ である。したがって可能な λ は $\lambda = \cos \alpha \pm \sqrt{E^2 - \sin^2 \alpha}$ の 2 つである。

この 2 つがともに絶対値 1 未満であるためには $-1 < \cos \alpha - \sqrt{E^2 - \sin^2 \alpha}$ かつ $\cos \alpha + \sqrt{E^2 - \sin^2 \alpha} < 1$ である。すなわち $\sqrt{E^2 - \sin^2 \alpha} < 1 - |\cos \alpha|$ が必要十分である。両辺は正でなければならないので、特に $|\cos \alpha| < 1$ である。両辺を 2 乗して $E^2 - \sin^2 \alpha < (1 - |\cos \alpha|)^2$ となる。 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ を用いて整理すると $E^2 < 2(1 - |\cos \alpha|)$ である。

もともと $E > 1$ であるから、求める範囲は $1 < E < \sqrt{2(1 - |\cos \alpha|)}$ である。ただしこの範囲が空でないためには $|\cos \alpha| < \frac{1}{2}$ が必要である。 $|\cos \alpha| \geq 1/2$ のときは条件を満たす $E > 1$ は存在しない。



▶ 解法 2 (実 2 次行列の固有値)

【方針】

$z = x + iy$ として漸化式を実 2 次行列で表す。 z_1 が z_0 の実数倍になる条件は実固有ベクトルの存在であり、固有値 2 個を求めれば、すべての該当初期値で 0 へ収束する条件が同時に判定できる。

【解答】

(1) $z = x + iy$ とすると、写像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} (1+E)\cos\alpha & (E-1)\sin\alpha \\ (1+E)\sin\alpha & (1-E)\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 - E^2 = 0.$$

判別式は

$$4(E^2 - \sin^2\alpha) > 0$$

なので相異なる 2 つの実固有値と実固有ベクトルをもつ。固有ベクトルを長さ 1 に選べば、対応する z_0 は $|z_0| = 1$ で $z_1 = \lambda z_0$ を満たす。

(2) 固有値は

$$\lambda_{\pm} = \cos\alpha \pm \sqrt{E^2 - \sin^2\alpha}.$$

固有ベクトルから始めれば $z_n = \lambda_{\pm}^n z_0$ だから、全ての該当 z_0 で収束する条件は

$$|\lambda_+| < 1, \quad |\lambda_-| < 1.$$

これは

$$\sqrt{E^2 - \sin^2\alpha} < 1 - |\cos\alpha|$$

と同値であり、平方して

$$E^2 < 2(1 - |\cos\alpha|).$$

もともと $E > 1$ なので

$$1 < E < \sqrt{2(1 - |\cos\alpha|)}.$$

この区間が空でない条件は

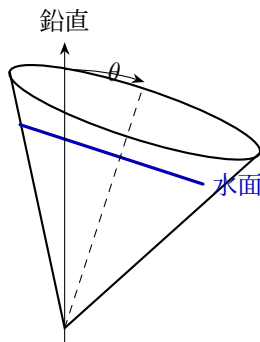
$$|\cos\alpha| < \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}.$$

この角度範囲外では該当する E は存在しない。

【総評】 難度 9、計算量 7。 z_1 が z_0 の実数倍という条件を円と直線の交点、および実 2 次行列の固有ベクトルとして捉えた。可能な 2 倍率の双方が絶対値 1 未満となる条件と、 E の区間が空でない角度条件を明示した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 3 問】

直線 $y = x$ ($0 \leq x \leq a$) を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器がある。回転軸を鉛直にしてこの容器に水をいっぱいに満たした後、右図のように、静かに θ ラジアン傾けて水を出し、そのままに保った。このときの容器内の水面の面積 $S(\theta)$ を求めよ。



▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

容器固定の座標で円すいを $x^2 + z^2 \leq y^2$ と置く。水面は最も低い上縁を通る水平面なので、その方程式を立てる。円すいとこの交線を xz 平面へ射影すると楕円になり、平方完成で 2 つの半径を求める。最後に平面の傾きによる面積倍率を掛ける。

【解答】

容器固定の座標で、円すいを

$$x^2 + z^2 \leq y^2, \quad 0 \leq y \leq a$$

と表す。容器を x 方向へ θ 傾けると、鉛直方向の高さは

$$y \cos \theta + x \sin \theta$$

に比例する。上縁 $y = a$, $x^2 + z^2 = a^2$ の最も低い点は $(x, y, z) = (-a, a, 0)$ だから、水面は

$$y \cos \theta + x \sin \theta = a(\cos \theta - \sin \theta)$$

である。

$c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ と書く。まず $0 \leq \theta < \pi/4$ とする。水面上では

$$y = \frac{a(c-s) - sx}{c}.$$

円すい内部の条件 $x^2 + z^2 \leq y^2$ に代入し、 $A = c^2 - s^2 > 0$ とおくと

$$Ax^2 + 2as(c-s)x + c^2z^2 \leq a^2(c-s)^2.$$

平方完成すれば

$$A \left(x + \frac{as(c-s)}{A} \right)^2 + c^2z^2 \leq \frac{a^2(c-s)^2c^2}{A}.$$

したがって xz 平面への射影は、半径

$$\frac{a(c-s)c}{A}, \quad \frac{a(c-s)}{\sqrt{A}}$$

の楕円であり、その面積は

$$\frac{\pi a^2(c-s)^2c}{A^{3/2}}.$$

水面から xz 平面への正射影の倍率は c なので、水面自身の面積は

$$S(\theta) = \frac{\pi a^2(c-s)^2}{A^{3/2}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{c^2 - s^2}}{(c+s)^2}.$$

$\theta = \pi/4$ では水面は頂点を通る 1 本の母線へ退化する。 $\theta > \pi/4$ では上縁の最低点が円すいの頂点より低くなり、水はすべて流出する。よって

$$S(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi a^2 \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}\right), \\ 0 & \left(\theta \geq \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

▶ 解法 2 (切断楕円の 2 半径を直接求める)

【方針】

水面平面と円すいの交線を、傾斜方向を含む鉛直断面と、それに垂直な断面で見る。平方完成後の標準形から切断楕円の長短半径を読み、積で面積を出す。

【解答】

$c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ とする。水面は最も低い上縁 $(-a, a, 0)$ を通るので

$$cy + sx = a(c - s).$$

$0 \leq \theta < \pi/4$ では $A = c^2 - s^2 > 0$ である。この平面と円すい $x^2 + z^2 = y^2$ の交線を整理すると

$$A \left(x + \frac{as(c-s)}{A} \right)^2 + c^2 z^2 = \frac{a^2(c-s)^2 c^2}{A}.$$

平面上で x 方向に動く実際の長さは、 xz 平面上の長さの $1/c$ 倍である。したがって切断楕円の 2 半径は

$$\rho_1 = \frac{a(c-s)}{A}, \quad \rho_2 = \frac{a(c-s)}{\sqrt{A}}.$$

よって

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \pi \rho_1 \rho_2 \\ &= \frac{\pi a^2 (c-s)^2}{A^{3/2}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{c^2 - s^2}}{(c+s)^2}. \end{aligned}$$

$\theta = \pi/4$ で楕円は母線へ退化し、それ以上では水が残らない。したがって

$$S(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi a^2 \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}\right), \\ 0 & \left(\theta \geq \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

【総評】 難度 9、計算量 8。傾けた円すいの水面平面を最も低い上縁から決め、平方完成を省略せず切断楕円の面積を求めた。投影面積倍率と平面上の 2 半径の 2 経路で式を検算し、45 度以上で水が残らない境界も扱った。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 4 問】

あるトーナメント形式 (注) の競技大会に、 2^n 人の選手が参加し、そのうち 2^m 人は強い選手であり、残りは弱い選手であるとする。ただし、 n, m は自然数であり $n > m$ とする。強い選手同士は $(n - m)$ 回戦が終わるまでは対戦することがないように、組み合わせが決められているものとする。また、強い選手が弱い選手に勝つ確率が x ($> \frac{1}{2}$) であるとし、強い選手同士および弱い選手同士はいずれも勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であるとする。つぎの問に答えよ。

- (1) $n = 3, m = 1$ として、ある特定の強い選手が優勝する確率を求めよ。
- (2) ある特定の強い選手が 1 回戦から i 回戦まで連続して勝つ確率を p_i とする。
 - (a) $n = 3, m = 2$ のとき、 p_3 を p_2 と x を用いて表せ。
 - (b) 任意の n, m に対して、 $i = n - m$ および $i = n$ のそれぞれの場合について、 p_i を p_{i-1} と x を用いて表せ。

(注) トーナメント形式： 2^n 人を 2 人ずつの 2^{n-1} 組に分けて 1 回戦を行い、敗者を除外して、その後同様に 2 回戦、3 回戦と対戦を進め、最後に残った 2 者で優勝を決定する形式。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

特定の強い選手が勝ち進む確率を、相手が強いかわいかわで条件分けする。強い選手同士は $n - m$ 回戦終了までは当たらないので、その間は毎回弱い選手に勝つ確率 x が掛かる。決勝では反対側の山から強い選手が来る確率を求め、相手が強いなら勝率 $1/2$ 、弱いなら勝率 x として合成する。 $n = 3, m = 2$ では反対側の山にいる 2 人の強い選手の少なくとも一方が決勝に来る確率を計算する。

【解答】

(1) $n = 3, m = 1$ では参加者は 8 人、強い選手は 2 人である。強い選手同士は $n - m = 2$ 回戦が終わるまでは対戦しないので、特定の強い選手は 1 回戦、2 回戦では弱い選手と対戦する。したがって決勝まで進む確率は x^2 である。

反対側の山にいるもう 1 人の強い選手も、決勝までに 2 回弱い選手に勝つ必要があるので、決勝に来る確率は x^2 である。決勝の相手が強い選手なら勝つ確率は $1/2$ 、弱い選手なら勝つ確率は x である。よって特定の強い選手が優勝する確率は $x^2 \left\{ \frac{x^2}{2} + x(1 - x^2) \right\} = x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^5$ である。

(2)

(a) $n = 3, m = 2$ では参加者は 8 人、強い選手は 4 人であり、強い選手同士は 1 回戦では当たらない。特定の強い選手が 2 回戦まで勝ち進んだ後、決勝の相手が強い選手である確率を求める。

反対側の山には強い選手が 2 人いる。それぞれ 1 回戦で弱い選手に勝つ確率は x である。2 人とも 1 回戦に勝てば、2 回戦で強い選手同士が当たり、どちらか一方の強い選手が決勝へ来る。1 人だけが 1 回戦に勝った場合は、その強い選手が 2 回戦で弱い選手に勝てば決勝へ来る。したがって決勝の相手が強い選手である確率は $x^2 + 2x(1 - x)x = 3x^2 - 2x^3$ である。

よって $p_3 = p_2 \left\{ \frac{1}{2}(3x^2 - 2x^3) + x(1 - 3x^2 + 2x^3) \right\}$ である。

(b) まず $i = n - m$ の場合を考える。強い選手同士は $n - m$ 回戦が終わるまでは対戦しないので、特定の強い選手が $n - m$ 回戦に勝つには、 $n - m - 1$ 回戦まで勝った後、弱い選手に勝てばよい。したがって $p_{n-m} = xp_{n-m-1}$ である。

次に $i = n$ 、すなわち決勝を考える。特定の強い選手が決勝に進んでいるとする。反対側の山には 2^{m-1} 人の強い選手がいる。反対側の山のある特定の強い選手が決勝に来る確率は p_{n-1} である。決勝に来られる選手は 1 人だけなので、これらの事象は互いに重ならない。したがって決勝の相手が強い選手である確率は $2^{m-1}p_{n-1}$ である。

相手が強い選手なら勝つ確率は $1/2$ 、相手が弱い選手なら勝つ確率は x である。よって $p_n = p_{n-1} \left\{ \frac{1}{2}2^{m-1}p_{n-1} + x(1 - 2^{m-1}p_{n-1}) \right\}$ である。

▶ 解法 2 (反対側の山の強者生存確率)

【方針】

特定選手の生存と反対側の山の勝者の種類を独立に扱う。反対側から強い選手が来る確率は、候補ごとの決勝進出事象が排反であることから、強い選手数と p_{n-1} の積で求める。

【解答】

(1) 特定の強い選手が決勝へ進む確率は x^2 。反対側の唯一の強い選手が決勝へ来る確率も x^2 である。よって

$$\begin{aligned}\Pr(\text{優勝}) &= x^2 \left\{ \frac{1}{2}x^2 + x(1-x^2) \right\} \\ &= x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^5.\end{aligned}$$

(2) (a) 反対側の山の強い選手は 2 人である。2 人とも初戦に勝つ確率は x^2 。ちょうど 1 人だけ勝ち、その 1 人が次戦も勝つ確率は

$$2x(1-x)x.$$

したがって決勝相手が強い確率は

$$q = x^2 + 2x^2(1-x) = 3x^2 - 2x^3.$$

よって

$$p_3 = p_2 \left\{ \frac{q}{2} + x(1-q) \right\} = p_2 \left\{ \frac{1}{2}(3x^2 - 2x^3) + x(1 - 3x^2 + 2x^3) \right\}.$$

(b) $(n-m)$ 回戦までは相手が必ず弱いので

$$p_{n-m} = xp_{n-m-1}.$$

決勝の反対側には 2^{m-1} 人の強い選手がいる。各人が決勝へ来る確率は p_{n-1} で、これらの事象は排反だから

$$\Pr(\text{決勝相手が強い}) = 2^{m-1}p_{n-1}.$$

したがって

$$p_n = p_{n-1} \left\{ \frac{1}{2}2^{m-1}p_{n-1} + x(1 - 2^{m-1}p_{n-1}) \right\}.$$

【総評】 難度 8、計算量 8。特定選手の生存確率と反対側の山の勝者の種類を分離する。決勝進出事象が排反であるため強い相手の確率を人数倍できることを明記し、特殊例と一般式を同じ原理で導いた。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。