

名古屋大学 2000 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上に、双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ と点 $A(2, 0)$ がある。

- (1) 点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ。
- (2) 直線 l が点 A を通り双曲線 C と相異なる 2 点で交わるように動くとき、この 2 点の中点は、あるひとつの双曲線上にあることを示せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

点 $A(2, 0)$ を通る直線を傾き m で置き、双曲線との交点を表す方程式を調べる。2 次方程式としての判別式は常に正なので、接線は存在しない。1 点のみで交わるのは、代入後の 2 次の係数が消えて一次方程式になる、つまり直線が漸近線に平行な場合である。(2) では相異なる 2 交点の x 座標の和から中点を出し、 m を消去して中点の軌跡を得る。

【解答】

(1) 点 $A(2, 0)$ を通る、 y 軸に平行でない直線を $y = m(x - 2)$ とおく。これを双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に代入すると $x^2 - m^2(x - 2)^2 = 1$ すなわち $(1 - m^2)x^2 + 4m^2x - 4m^2 - 1 = 0$ である。

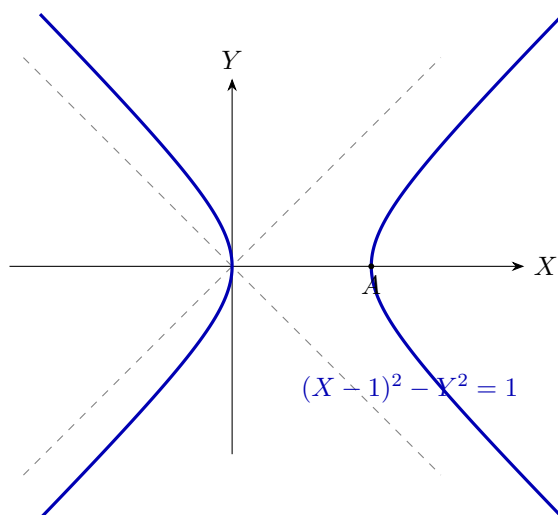
この方程式が 2 次方程式であるとき、その判別式は $(4m^2)^2 - 4(1 - m^2)(-4m^2 - 1) = 4(3m^2 + 1) > 0$ である。したがって 2 次方程式の場合には交点は 2 点であり、1 点のみにはならない。よって 1 点のみで交わるには、2 次の係数が消える必要がある。すなわち $1 - m^2 = 0$ より $m = \pm 1$ である。このとき実際に一次方程式となり、交点は 1 点である。求める直線は $y = x - 2$, $y = -x + 2$ である。なお、点 A を通る垂直線 $x = 2$ は双曲線と 2 点で交わるので該当しない。

(2) $m \neq \pm 1$ とし、直線が双曲線と相異なる 2 点で交わるとする。2 交点の x 座標を x_1, x_2 とすると、上の 2 次方程式の解と係数の関係から $x_1 + x_2 = -\frac{4m^2}{1 - m^2}$ である。したがって中点の x 座標を X とすると $X = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2m^2}{1 - m^2}$ である。

中点は直線 $y = m(x - 2)$ 上にあるから、その y 座標を Y とすると $Y = m(X - 2) = m\left(-\frac{2m^2}{1 - m^2} - 2\right) = -\frac{2m}{1 - m^2}$ である。ここから $X - 1 = -\frac{1 + m^2}{1 - m^2}$, $Y = -\frac{2m}{1 - m^2}$ なので

$$(X - 1)^2 - Y^2 = \frac{(1 + m^2)^2 - 4m^2}{(1 - m^2)^2} = \frac{(1 - m^2)^2}{(1 - m^2)^2} = 1$$

である。よって 2 交点の中点は、ひとつの双曲線 $(X - 1)^2 - Y^2 = 1$ 上にある。



▶ 解法 2 (弦の中点と二次形式)

【方針】

双曲線を二次形式 $Q(x, y) = x^2 - y^2$ で見る。弦の中点 M と半弦ベクトル $\mathbf{d}$ を用い、 $Q(M + \mathbf{d}) = Q(M - \mathbf{d})$ を引く。弦が A を通る条件と合わせると、中点軌跡が直接得られる。

【解答】

(1) A を通る直線を

$$(x, y) = (2, 0) + t(u, v)$$

と表す。双曲線へ代入すると

$$(u^2 - v^2)t^2 + 4ut + 3 = 0.$$

$u^2 - v^2 \neq 0$ なら判別式は

$$16u^2 - 12(u^2 - v^2) = 4u^2 + 12v^2 > 0$$

で、相異なる 2 交点をもつ。1 点だけで交わるには $u^2 - v^2 = 0$ 、すなわち $v = \pm u$ が必要である。よって

$$y = x - 2, \quad y = -x + 2.$$

(2) 2 交点を

$$M + \mathbf{d} = (X + u, Y + v), \quad M - \mathbf{d} = (X - u, Y - v)$$

とする。両点が双曲線上なので 2 式を引くと

$$Xu - Yv = 0.$$

弦は $A = (2, 0)$ を通るから、 $\mathbf{d}$ は $(X - 2, Y)$ と平行である。したがって上式へ $(u, v) = k(X - 2, Y)$ を代入し、

$$X(X - 2) - Y^2 = 0.$$

よって

$$(X - 1)^2 - Y^2 = 1.$$

したがって全ての中点はこの 1 つの双曲線上にある。

【総評】 難度 7、計算量 6。1 点だけで交わる直線は通常の接線ではなく、二次係数が消える漸近線平行の 2 直線である。中点軌跡は解と係数の関係と二次形式の弦条件の両方から同じ双曲線を得た。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

■ 【第 2 問】

この問題では、 e は自然対数の底、 $\log$ は自然対数を表す。

実数 a, b に対して、直線 $l: y = ax + b$ は曲線 $C: y = \log(x + 1)$ と、 x 座標が $0 \leq x \leq e - 1$ を満たす点で接しているとする。

- (1) このときの点 (a, b) の存在範囲を求め、 ab 平面上に図示せよ。
- (2) 曲線 C および 3 つの直線 l , $x = 0$, $x = e - 1$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と、このときの面積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

接点の x 座標を ξ 、 $s = \xi + 1$ とおく。接線の傾きは $1/s$ 、切片は $\log s - (s - 1)/s$ となり、 $1 \leq s \leq e$ から (a, b) の範囲が出る。面積は対数関数が上に凸ではなく上に凹であるため接線が曲線の上にあることを使い、接線と曲線の差を 0 から $e - 1$ まで積分する。得られた $S(s)$ を微分して最小化する。

【解答】

(1) 接点の x 座標を ξ とし、 $s = \xi + 1$ とおく。条件 $0 \leq \xi \leq e - 1$ より $1 \leq s \leq e$ である。曲線 $y = \log(x + 1)$ の導関数は $y' = \frac{1}{x + 1}$ だから、接線の傾きは $a = \frac{1}{s}$ である。また接点は $(s - 1, \log s)$ なので $\log s = \frac{1}{s}(s - 1) + b$ より $b = \log s - \frac{s - 1}{s}$

である。 $a = 1/s$ から $s = 1/a$ である。したがって $\frac{1}{e} \leq a \leq 1$ であり、 $b = \log \frac{1}{a} - (1 - a) = -\log a - 1 + a$ である。よって存在範囲は $b = -\log a - 1 + a$, $\frac{1}{e} \leq a \leq 1$ で表される曲線の弧である。

(2) 接線は $y = \log s + \frac{x - (s - 1)}{s}$ である。 $\log x$ 型の曲線は上に凹なので、接線は曲線の上側にある。したがって面積は

$$S(s) = \int_0^{e-1} \left\{ \log s + \frac{x - (s - 1)}{s} - \log(x + 1) \right\} dx$$

である。

まず

$$\int_0^{e-1} \log(x + 1) dx = \int_1^e \log u du = [u \log u - u]_1^e = 1$$

である。また

$$\int_0^{e-1} \left\{ \log s + \frac{x - (s - 1)}{s} \right\} dx = (e - 1) \log s + \frac{(e - 1)^2}{2s} - \frac{(s - 1)(e - 1)}{s}$$

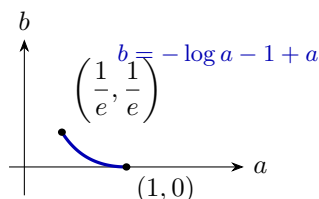
である。よって $S(s) = (e - 1) \log s + (e - 1) \left\{ \frac{e + 1}{2s} - 1 \right\} - 1$ である。

微分すると

$$S'(s) = \frac{e - 1}{s} - \frac{(e - 1)(e + 1)}{2s^2} = \frac{e - 1}{s^2} \left(s - \frac{e + 1}{2} \right)$$

である。 $1 \leq s \leq e$ において、 $S(s)$ は $s = (e + 1)/2$ で最小となる。したがって $s = \frac{e + 1}{2}$ であり、 $a = \frac{2}{e + 1}$, $b = \log \frac{e + 1}{2} - \frac{e - 1}{e + 1}$ である。

このとき $(e + 1)/(2s) - 1 = 0$ なので、最小面積は $S_{\min} = (e - 1) \log \frac{e + 1}{2} - 1$ である。



▶ 解法 2 (接線の平均値で最小化する)

【方針】

接点を $s = \xi + 1$ で表す。接線と曲線の面積差では、接線部分の積分を「区間長 × 中点での接線値」として一度に計算する。結果は $\log s + (e + 1)/(2s)$ の最小化に帰着する。

【解答】

(1) 接点を $(s - 1, \log s)$ とすれば $1 \leq s \leq e$ であり、接線は

$$y = \log s + \frac{x - s + 1}{s}.$$

したがって

$$a = \frac{1}{s}, \quad b = \log s - \frac{s - 1}{s}.$$

$s = 1/a$ を代入して

$$b = -\log a - 1 + a, \quad \frac{1}{e} \leq a \leq 1.$$

(2) $\log(x + 1)$ は上に凹なので、接線は曲線以上にある。接線は一次関数だから、その $0 \leq x \leq e - 1$ における積分は区間長と中点 $x = (e - 1)/2$ での値の積に等しい。よって面積は

$$\begin{aligned} S(s) &= (e - 1) \left\{ \log s + \frac{(e - 1)/2 - s + 1}{s} \right\} - \int_0^{e-1} \log(x + 1) dx \\ &= (e - 1) \left\{ \log s + \frac{e + 1}{2s} - 1 \right\} - 1. \end{aligned}$$

ここで

$$S'(s) = \frac{e-1}{s^2} \left(s - \frac{e+1}{2} \right).$$

よって $s = (e+1)/2$ で最小となり、

$$a = \frac{2}{e+1}, \quad b = \log \frac{e+1}{2} - \frac{e-1}{e+1},$$

$$S_{\min} = (e-1) \log \frac{e+1}{2} - 1.$$

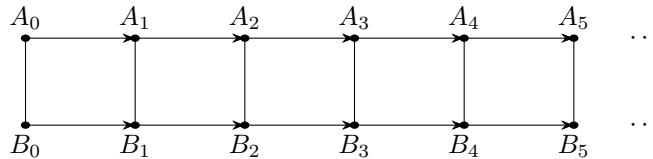
【総評】 難度 6、計算量 7。対数曲線は上に凹なので接線が常に上側にある。接点範囲、接線積分、定積分、内部停留点を順に確認し、積分の平均値表示でも最小値を独立に再現した。2つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第3問】

図のように、平面上に点 $A_0, A_1, A_2, \dots$ および $B_0, B_1, B_2, \dots$ が並んでいる。点 P は A_0 から出発し、次の規則に従いこれらの点の上を移動する。

P が A_n にいるときには1秒後に A_{n+1} または B_n に、一方 B_n にいるときには B_{n+1} または A_n に移動する。ただし、前にいた点には戻らない。また、 P が移動しうる点が多数あるときには、それぞれの点へ等確率で移動する。 P が A_n へ到る行き方が a_n 通り、 B_n へ到る行き方が b_n 通りあるとする。

- (1) a_3, b_3 を求めよ。
- (2) a_n, b_n を求めよ。
- (3) 一方、点 Q は A_8 から P と同時に出発し、1秒ごとに順次 $A_8 \rightarrow A_7 \rightarrow A_6 \rightarrow \dots \rightarrow A_0$ と移動し、その後は A_0 にとどまる。 P と Q が出会う確率を求めよ。



▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

行き方の数では、 A_n に入る直前が A_{n-1} である場合と、 $B_{n-1} \rightarrow B_n \rightarrow A_n$ と進む場合に分ける。戻れない条件により、 $B_n \rightarrow A_n$ の直前は必ず B_{n-1} になる。同様に B_n についても漸化式が立つ。出会う確率は時刻 t に Q が A_{8-t} にいることから、可能な時刻が 4, 5 だけに絞られる。時刻 4 は一直線に進む 1 通り、時刻 5 は戻れない条件で確率の異なる 6 通りを列挙して合計する。

【解答】

(1) まず行き方の数を調べる。 A_n に到る最後の部分は、次の 2 種類に分けられる。

1 つは $A_{n-1} \rightarrow A_n$ と進む場合である。もう 1 つは $B_n \rightarrow A_n$ と進む場合であるが、直前の点に戻ることにはできないので、この直前は A_n ではなく B_{n-1} でなければならない。したがってこの場合の最後の部分は $B_{n-1} \rightarrow B_n \rightarrow A_n$ である。よって $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ である。同様に $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ である。

初めに A_0 にいるので A_0 への行き方は 1 通りである。また B_0 へは $A_0 \rightarrow B_0$ の 1 通りで到るから $a_0 = b_0 = 1$ である。したがって $a_1 = b_1 = 2$, $a_2 = b_2 = 4$, $a_3 = b_3 = 8$ である。よって $a_3 = 8$, $b_3 = 8$ である。

(2) 上の漸化式で、 $a_0 = b_0 = 1$ である。もし $a_{n-1} = b_{n-1} = 2^{n-1}$ なら $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = 2^n$, $b_n = b_{n-1} + a_{n-1} = 2^n$ である。よって数学的帰納法により $a_n = b_n = 2^n$ である。

(3) 点 Q は時刻 t に A_{8-t} にいる。ただし $0 \leq t \leq 8$ とする。点 P は 1 秒で添字を高々 1 だけ増やすので、 P と Q が出会うには $8-t \leq t$ が必要である。また P が A_{8-t} にいるには、時刻 t までの横方向の移動回数が $8-t$ であり、残りの縦方向の移動回数は $t - (8-t) = 2t - 8$ である。 A 側に戻っているためには縦移動回数は偶数である。これらを合わせると、実際に出会う時刻は $t = 4, 5$ だけである。

時刻 4 で出会うには $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$ と進むしかない。各時刻で 2 通りの選択があるので、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \text{ である。}$$

時刻 5 で出会うには A_3 にいる必要がある。可能な経路とその確率は次の通りである。

経路	確率
$A_0A_1A_2B_2B_3A_3$	$1/16$
$A_0A_1B_1B_2B_3A_3$	$1/16$
$A_0B_0B_1B_2B_3A_3$	$1/16$
$A_0A_1B_1B_2A_2A_3$	$1/8$
$A_0B_0B_1B_2A_2A_3$	$1/8$
$A_0B_0B_1A_1A_2A_3$	$1/8$

である。確率が $1/8$ になる経路があるのは、途中で直前の点へ戻れず、次の移動が強制される箇所があるためである。したがって時刻 5 で出会う確率は $3 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$ である。

時刻 4 と時刻 5 の出会いは同時には起こらない。よって求める確率は $\frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8}$ である。

▶ 解法 2 (状態確率表で出合いを追う)

【方針】

行き方の数は対称な 2 変数漸化式を行列で解く。出合いについては「直前の点」と「現在の点」を状態に含め、戻れないため選択が 1 通りになる場合も反映した確率表を時刻 5 まで作る。

【解答】

(1) 最後に水平に進む場合と、反対側から縦に移る場合を分けると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$a_0 = b_0 = 1$ だから

$$a_3 = b_3 = 8.$$

(2) $(1, 1)$ は上の行列で 2 倍される。初期ベクトルも $(1, 1)$ なので

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$a_n = b_n = 2^n.$$

(3) 時刻 t の Q は A_{8-t} にいる。添字の増加回数と上下移動の偶奇から、出会えるのは $t = 4$ の A_4 と、 $t = 5$ の A_3 だけである。

戻り禁止を含めて状態確率を順に更新すると、必要な成分は

t	$\Pr(P = A_{8-t})$	該当点
4	$\frac{1}{16}$	A_4
5	$\frac{9}{16}$	A_3

となる。実際、 A_4 へは 4 回連続で上段を進む 1 経路だけで確率 $1/16$ 。 A_3 へは、確率 $1/16$ の 3 経路と、途中の移動が強制されて確率 $1/8$ となる 3 経路があり、

$$3 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{16}.$$

2 事象は排反なので

$$\Pr(\text{出会う}) = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8}.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。図の欠落していた梯子状の点配置を復元した。行き方の数と各経路の確率は同じではなく、戻り禁止で移動が強制される状態を区別する必要がある。時刻 4 と 5 の排反な出合いを状態表と経路列挙で照合した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 4 問 (a)】

座標空間内の 6 つの平面

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 1$$

で囲まれた立方体を C とする. $\vec{l} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ を $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ を満たし, 大きさが 1 のベクトルとする. H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする.

このとき, ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を, a_1, a_2, a_3 を用いて表せ. ここに, C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

平面 H は光線方向 $\vec{l}$ に垂直なので, 求める影は立方体の光線方向への正射影である. 凸多面体の正射影面積は, 互いに反対側にある面のうち光の方向から見える側の面の射影面積を足せばよい. 単位立方体では, yz 面に平行な面, zx 面に平行な面, xy 面に平行な面の面積はいずれも 1 で, それぞれの射影倍率が a_1, a_2, a_3 になる.

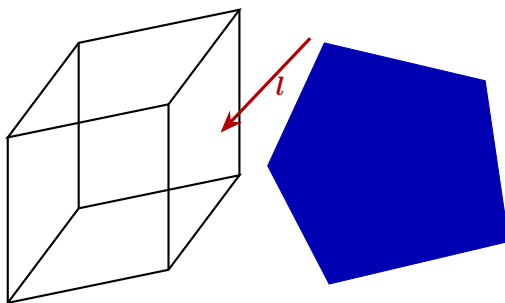
【解答】

光線の進行方向は $\vec{l} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ であり, $|\vec{l}| = 1$ である. 影は, 立方体を $\vec{l}$ に垂直な平面 H へ正射影した図形である.

立方体の 6 面は, yz 面に平行な 2 面, zx 面に平行な 2 面, xy 面に平行な 2 面に分けられる. 正射影では, 互いに反対側にある 2 面のうち, 光の方向から見える側の 1 面だけが境界への寄与を持つと考えればよい.

たとえば yz 面に平行な面の法線方向は x 軸方向である. この面の面積は 1 であり, 平面 H への射影面積は $1 \cdot |\vec{l} \cdot (1, 0, 0)| = a_1$ である. 同様に, zx 面に平行な面からの寄与は a_2 , xy 面に平行な面からの寄与は a_3 である.

したがって影の面積は $a_1 + a_2 + a_3$ である.



▶ 解法 2 (射影辺が作る六角形)

【方針】

立方体の 3 本の単位辺を平面 H へ射影したベクトルを $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ とする. 影はこの 3 ベクトルが生成する六角形で, その面積は 3 つの平行四辺形面積の和になる. 各面積を光線方向との内積で求める.

【解答】

座標軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とし, 平面 H への正射影をそれぞれ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ とする. 立方体の影は

$$\{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + r\mathbf{w} \mid 0 \leq s, t, r \leq 1\}$$

であり, 境界は一般に六角形になる. この六角形は, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ が張る 3 つの平行四辺形へ分割できる.

$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が張る単位正方形の H への射影面積は, 法線 $\mathbf{e}_1$ と単位投影方向 $\mathbf{l} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ の内積の絶対値だから

$$\text{Area}_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a_1.$$

ここで記号は平面 H 上の平行四辺形面積を表す. 同様に残る 2 面積は a_2, a_3 である. したがって影の面積は

$$a_1 + a_2 + a_3.$$

これは 3 方向の面が重ならず六角形を分割するため, 重複を数えていない.

【総評】 難度 7、計算量 5。立方体の影は 3 対の面を単純に全部足すのではなく、可視側の射影または射影辺が作る六角形の分割として重複なく数える。各単位面の射影倍率が a_1, a_2, a_3 になる理由まで記述した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。

【第 4 問 (b)】

実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

は、相異なる虚数解 α, β と実数解 γ をもつとする。

(1) $\beta = \bar{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ。ここで、 $\bar{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(2) α, β, γ が等式 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ を満たし、さらに複素数平面上で α, β, γ を表す 3 点は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする。このとき、実数の組 (p, q, r) をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

実係数多項式では、非実数解の共役も解になることを、方程式全体の共役を取って示す。(2) では $\beta = \bar{\alpha}$ より $\alpha = u + vi$, $\beta = u - vi$ とおく。正三角形の一辺 $\alpha\beta$ の長さから $v^2 = 3/4$ が決まり、第 3 の頂点 γ は実軸上で $u \pm 3/2$ に限られる。条件 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ を代入して u を求め、解と係数の関係で (p, q, r) に戻す。

【解答】

(1) α が解であるから $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$ である。係数 p, q, r はすべて実数なので、両辺の共役を取ると $\bar{\alpha}^3 + p\bar{\alpha}^2 + q\bar{\alpha} + r = 0$ となる。したがって $\bar{\alpha}$ も方程式の解である。 α は虚数解なので $\bar{\alpha} \neq \alpha$ である。また虚数解は相異なる 2 つ α, β だけであるから $\beta = \bar{\alpha}$ である。

(2) (1) より $\alpha = u + vi$, $\beta = u - vi$ とおける。ただし u, v は実数で $v \neq 0$ である。 α と β の距離は $2|v|$ であり、正三角形の一辺の長さが $\sqrt{3}$ だから $2|v| = \sqrt{3}$, $v^2 = \frac{3}{4}$ である。

第 3 の頂点 γ は実軸上にあり、 α, β を結ぶ垂直二等分線も実軸である。正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$ なので $\gamma = u + \frac{3}{2}$ または $\gamma = u - \frac{3}{2}$ である。

また $\alpha\beta = u^2 + v^2$, $\beta\gamma + \gamma\alpha = 2u\gamma$ だから、条件 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ は $u^2 + \frac{3}{4} + 2u\gamma = 3$ である。

まず $\gamma = u + 3/2$ のとき $u^2 + \frac{3}{4} + 2u\left(u + \frac{3}{2}\right) = 3$ であり、整理して $4u^2 + 4u - 3 = 0$ となる。したがって $u = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ である。対応する γ はそれぞれ $\gamma = 2, 0$ である。

次に $\gamma = u - 3/2$ のとき $u^2 + \frac{3}{4} + 2u\left(u - \frac{3}{2}\right) = 3$ であり、整理して $4u^2 - 4u - 3 = 0$ となる。したがって $u = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ である。対応する γ はそれぞれ $\gamma = 0, -2$ である。

解と係数の関係より $p = -(\alpha + \beta + \gamma) = -(2u + \gamma)$, $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$, $r = -\alpha\beta\gamma = -(u^2 + v^2)\gamma$ である。4 つの場合を代入すると $(p, q, r) = (-3, 3, -2), (3, 3, 0), (-3, 3, 0), (3, 3, 2)$ である。したがって求める実数の組は $(3, 3, 0), (-3, 3, -2), (3, 3, 2), (-3, 3, 0)$ である。

▶ 解法 2 (正三角形の向きを符号でまとめる)

【方針】

共役根を $u \pm vi$ とし、正三角形の向きを $\varepsilon = \pm 1$ を用いて $\gamma = u + 3\varepsilon/2$ と統一する。条件式を 1 本の二次方程式にし、4 組の根を直接展開して係数を読む。

【解答】

(1) 実係数多項式 $f(x)$ では

$$\overline{f(\alpha)} = f(\bar{\alpha}).$$

$f(\alpha) = 0$ だから $f(\bar{\alpha}) = 0$ である。 α は非実数で、非実根は相異なる α, β の 2 個だけなので

$$\beta = \bar{\alpha}.$$

(2)

$$\alpha = u + vi, \quad \beta = u - vi$$

とおく。辺 $\alpha\beta$ の長さから

$$2|v| = \sqrt{3}, \quad v^2 = \frac{3}{4}.$$

正三角形の第 3 頂点は実軸上にあり、

$$\gamma = u + \frac{3}{2}\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

と表せる。条件 $\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = 3$ は

$$u^2 + \frac{3}{4} + 2u \left(u + \frac{3}{2}\varepsilon \right) = 3,$$

すなわち

$$4u^2 + 4\varepsilon u - 3 = 0.$$

よって

$$(\varepsilon, u, \gamma) = (1, \frac{1}{2}, 2), (1, -\frac{3}{2}, 0), (-1, \frac{3}{2}, 0), (-1, -\frac{1}{2}, -2).$$

各場合に

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = \{x^2 - 2ux + (u^2 + \frac{3}{4})\}(x - \gamma)$$

を展開する。得られる係数は

$$(p, q, r) = (-3, 3, -2), (3, 3, 0), (-3, 3, 0), (3, 3, 2).$$

したがってこの 4 組がすべてである。

【総評】 難度 7、計算量 7。実係数多項式の共役根定理を証明し、正三角形の高さと実軸上の第 3 頂点から 4 場合を漏れなく列挙した。符号変数による一括処理でも 4 組の係数を再確認した。2 つの解法は着眼点を分け、必要性・十分性、端点、等号条件を省略せず記述した。