

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2002 年度 理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

任意の実数 x, y に対して, $k = x^2 + 2y^2$ とする. つぎの各問に答えよ.

(1) x と y が関係 $x + 2y = 1$ を満たすとする. ただし, $x \leq 0$ または $x \geq 1$ である. このとき, k の最小値と, それを与える x と y の値を求めよ.

(2) x と y が 3 つの不等式

$$x + 2y \leq 1, \quad 4x - y \geq -1, \quad 2x - 4y \leq -1$$

を満たすとき, k の最小値と, それを与える x と y の値を求めよ.

(3) $l = xy$ とする. $x > 0, y > 0$ であるとき, $\frac{k}{l}$ の最小値を求めよ.

第 2 問

つぎの各問に答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とするとき、任意の整数 n に対して、つぎの (a), (b) が成り立つことを示せ。ただし、 $z \neq 0$ とする。

(a) $z^n + (\bar{z})^n$ は実数である。

(b) $z^n - (\bar{z})^n$ は 0 または純虚数である。

- (2) θ_1, θ_2, p, q を実数とし、

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi, \quad \alpha = p + qi, \quad \beta = -p + qi$$

とするとき、つぎの各問に答えよ。ただし、 $\alpha \neq 0$ とする。

(a)

$$A_n = \alpha^n \cos n\theta_1 + \beta^n \cos n\theta_2, \quad B_n = \alpha^n \sin n\theta_1 + \beta^n \sin n\theta_2$$

とするとき、任意の整数 n に対して、つぎの (i), (ii) が成り立つことを示せ。

(i) A_n は実数である。

(ii) B_n は 0 または純虚数である。

- (b) $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ とし、 $C_n = (\alpha z_1)^n + (\beta z_2)^n$ とするとき、任意の整数 n に対して C_n は実数であることを示せ。

第 3 問

関数 $f(x) = 3x + 6 \sin x$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で 2 つの極値 $f(a)$, $f(b)$ ($a < b$) をもつ. また, $y = g(x)$ を点 $(b, f(b))$ を通る傾き 3 の直線とする. つぎの各問に答えよ.

- (1) $f(a)$ および $f(b)$ を求めよ.
- (2) 関数 $g(c) = f(a)$ を満たす c を求めよ.
- (3) 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (4) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq b$),

線分 $y = g(x)$ ($b \leq x \leq 2\pi$),

直線 $y = d$ (ただし, d は定数で, $d = g(2\pi)$),

および y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに回転してできる器を考える. この器の縁 ($x = 2\pi$ の円周上) から静かに水を入れるとき, 器の底 (原点) に水が達するまでに水はどのくらい入るか.

第 4 問

赤と白のランプが一つずつある．それぞれのランプは，1 秒ごとにある規則にしたがって点灯または消灯し，1 秒間その状態を保持する．時刻 0 秒から実験を開始する．以下， m, n は 0 以上の整数とする．

(1) 両方のランプとも，以下の規則 R_1, R_2 にしたがうとする．

R_1 ：時刻 m 秒からの 1 秒間に点灯している場合，時刻 $m + 1$ 秒で消灯する確率は p である．

R_2 ：時刻 m 秒からの 1 秒間に消灯している場合，時刻 $m + 1$ 秒で点灯する確率は p である．

時刻 0 秒からの 1 秒間，白は消灯，赤は点灯しているとする．このとき，つぎの各問に答えよ．

(a) 時刻 n 秒からの 1 秒間に白のランプが点灯している確率を求めよ．

(b) 時刻 n 秒からの 1 秒間に少なくとも一方のランプが点灯している確率を求めよ．

(2) つぎに，規則を以下の R'_1, R'_2, R'_3 のように変更した．

R'_1 ：時刻 m 秒からの 1 秒間，両方が消灯している場合には，時刻 $m + 1$ 秒ではどちらか一方が点灯する．白が消灯する確率は p である．

R'_2 ：時刻 m 秒からの 1 秒間，どちらか一方だけが点灯している場合には，時刻 $m + 1$ 秒で残りのランプが点灯するか，あるいは，点灯しているランプが消灯する．残りのランプが点灯する確率は p である．

R'_3 ：時刻 m 秒からの 1 秒間，両方が点灯している場合には，時刻 $m + 1$ 秒ではどちらか一方が消灯する．赤が消灯する確率は p である．

時刻 0 秒からの 1 秒間，白は消灯，赤は点灯しているとする．このとき，つぎの各問に答えよ．

(a) 時刻 n 秒からの 1 秒間に白のランプが点灯している確率を求めよ．

(b) 時刻 n 秒からの 1 秒間に少なくとも一方のランプが点灯している確率を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)