

名古屋大学 2002 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

任意の実数 x, y に対して, $k = x^2 + 2y^2$ とする. つぎの各問に答えよ.

(1) x と y が関係 $x + 2y = 1$ を満たすとする. ただし, $x \leq 0$ または $x \geq 1$ である. このとき, k の最小値と, それを与える x と y の値を求めよ.

(2) x と y が 3 つの不等式

$$x + 2y \leq 1, \quad 4x - y \geq -1, \quad 2x - 4y \leq -1$$

を満たすとき, k の最小値と, それを与える x と y の値を求めよ.

(3) $l = xy$ とする. $x > 0, y > 0$ であるとき, $\frac{k}{l}$ の最小値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は直線 $x + 2y = 1$ 上で二次式 $x^2 + 2y^2$ を最小にする問題である. ただし条件 $xy \leq 0$ により, 直線上の許される範囲が $x \leq 0$ または $x \geq 1$ に分かれる. $y = (1 - x)/2$ として一変数化し, それぞれの範囲で最小値を比べる. (2) は 3 本の直線で囲まれる三角形上の最小化なので, 内部に臨界点がないことを確認し, 各辺上の一変数二次関数を調べる. (3) は $k/l = x/y + 2y/x$ と変形して, 正の量に対する相加相乗平均を用いる.

【解答】

(1) 条件 $x + 2y = 1$ から $y = \frac{1-x}{2}$ である. したがって $k = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ となる.

問題の条件は $x \leq 0$ または $x \geq 1$ である. 直線 $x + 2y = 1$ 上では, $x \leq 0$ のとき $y \geq \frac{1}{2} > 0$, $x \geq 1$ のとき $y \leq 0$ であり, 許される範囲は $x \leq 0$ または $x \geq 1$ である.

二次関数 $\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ の軸は $x = \frac{1}{3}$ で, これは許される範囲に入らない. よって $x \leq 0$ では端 $x = 0$ で最小となり, $k = \frac{1}{2}$ である. 一方, $x \geq 1$ では端 $x = 1$ で最小となり, $k = 1$ である. したがって $(x, y) = (0, \frac{1}{2})$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる.

(2) 不等式を y について書くと $y \leq \frac{1-x}{2}$, $y \leq 4x + 1$, $y \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ である. この 3 直線で囲まれる三角形の頂点は

$$\left(-\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \quad \left(-\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

である. $k = x^2 + 2y^2$ は平面全体では原点でのみ最小となるが, 原点はこの三角形領域に含まれない. したがって最小値は境界上で調べればよい.

境界 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ 上では $k = x^2 + 2\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ である. これは $x = -\frac{1}{6}$ で最小となり, そのとき

$$y = \frac{1}{6}, \quad k = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

である. この点は該当する辺の上にある.

残りの 2 辺では, 最小点を調べても $\frac{1}{12}$ より小さくならない. 実際, $y = \frac{1-x}{2}$ 上では $k = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ であり, この辺の範囲での最小値は端 $x = \frac{1}{4}$ で $\frac{11}{32}$ である. また $y = 4x + 1$ 上では $k = 33x^2 + 16x + 2$ であり, この辺の範囲での最小値は端 $x = -\frac{3}{14}$ で $\frac{17}{196}$ である. いずれも $\frac{1}{12}$ 以上である.

よって $(x, y) = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ のとき, 求める最小値は $\frac{1}{12}$ である.

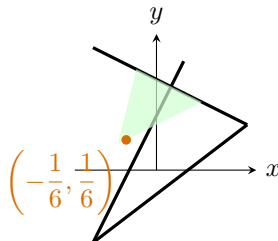
(3) $xy > 0$ より, x と y は同符号であり, $\frac{x}{y} > 0$, $\frac{2y}{x} > 0$ である. したがって $\frac{k}{l} = \frac{x^2 + 2y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}$ と変形で

きる。

相加相乗平均より

$$\frac{x}{y} + \frac{2y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} = 2\sqrt{2}$$

である。等号は $\frac{x}{y} = \frac{2y}{x}$ すなわち $x^2 = 2y^2$ のとき成立する。これは $xy > 0$ のもとで実現できるので、最小値は $2\sqrt{2}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

二次式を平方完成して、制約直線・三角形の各辺における最短点を調べる。(3) は比 $t = x/y > 0$ を導入すると一変数の最小化になる。

【解答】

(1) $y = (1 - x)/2$ より

$$k = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}.$$

許される範囲 $x \leq 0$ または $x \geq 1$ では $x = 0$ のときが最小で

$$(x, y) = \left(0, \frac{1}{2} \right), \quad k_{\min} = \frac{1}{2}.$$

(2) 3 辺のうち $y = x/2 + 1/4$ 上では

$$k = \frac{3}{2} \left(x + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{12}.$$

$x = -1/6$ は実際に辺上にある。ほかの 2 辺を同様に平方完成すると、この値より小さくならない。よって

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right), \quad k_{\min} = \frac{1}{12}.$$

(3) $t = x/y > 0$ とおくと

$$\frac{k}{l} = t + \frac{2}{t}.$$

$$t + \frac{2}{t} - 2\sqrt{2} = \frac{(t - \sqrt{2})^2}{t} \geq 0.$$

したがって最小値は $2\sqrt{2}$ であり、 $x/y = \sqrt{2}$ のときに成立する。

【総評】 難度は 6、計算量は 6。目安時間は 18 分。(1) では制約で許される二つの半直線を比較する。(2) は三角形領域の各辺を調べ、 $y = x/2 + 1/4$ 上の点 $(-1/6, 1/6)$ が最短点になる。ほかの頂点計算、とくに $(-3/14, 1/7)$ での値は $17/196$ であり算術ミスに注意する。(3) は等号条件まで書く。

【第 2 問】

つぎの各問に答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とするとき、任意の整数 n に対して、つぎの (a), (b) が成り立つことを示せ。ただし、 $z \neq 0$ とする。

(a) $z^n + (\bar{z})^n$ は実数である。

(b) $z^n - (\bar{z})^n$ は 0 または純虚数である。

- (2) θ_1, θ_2, p, q を実数とし、

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi, \quad \alpha = p + qi, \quad \beta = -p + qi$$

とするとき、つぎの各問に答えよ。ただし、 $\alpha \neq 0$ とする。

(a)

$$A_n = \alpha^n \cos n\theta_1 + \beta^n \cos n\theta_2, \quad B_n = \alpha^n \sin n\theta_1 + \beta^n \sin n\theta_2$$

とするとき、任意の整数 n に対して、つぎの (i), (ii) が成り立つことを示せ。

(i) A_n は実数である。

(ii) B_n は 0 または純虚数である。

- (b) $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ とし、 $C_n = (\alpha z_1)^n + (\beta z_2)^n$ とするとき、任意の整数 n に対して C_n は実数であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は複素数の共役と整数乗の関係を用いる。 $z \neq 0$ なので負の整数乗についても $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ が成り立つことに注意する。

(2a) は $\theta_2 = \pi - \theta_1, \beta = -\bar{\alpha}$ を使い、 A_n, B_n を α^n と $\bar{\alpha}^n$ の和・差に直して実数性と純虚数性を示す。(2b) は $z_2 = -\bar{z}_1$ を見抜き、 $\beta z_2 = \bar{\alpha} \bar{z}_1$ に帰着させる。

【解答】

(1) $z \neq 0$ であり、 n は整数である。正の整数乗では明らかに $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ であり、負の整数乗についても

$$\overline{z^{-m}} = \frac{1}{\overline{z^m}} = \frac{1}{\bar{z}^m} = \frac{1}{\bar{z}^m} = \bar{z}^{-m}$$

が成り立つ。したがってすべての整数 n で $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ である。

よって

$$\overline{z^n + \bar{z}^n} = \bar{z}^n + z^n = z^n + \bar{z}^n$$

だから、 $z^n + \bar{z}^n$ は実数である。また、

$$\overline{z^n - \bar{z}^n} = \bar{z}^n - z^n = -(z^n - \bar{z}^n)$$

であるから、 $z^n - \bar{z}^n$ は純虚数である。すなわち

$$z^n + \bar{z}^n \text{ は実数, } \quad z^n - \bar{z}^n \text{ は純虚数}$$

である。

(2) (a) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ より $\theta_2 = \pi - \theta_1$ である。また $\beta = -p + qi = -(p - qi) = -\bar{\alpha}$ である。

したがって $\cos n\theta_2 = \cos(n\pi - n\theta_1) = (-1)^n \cos n\theta_1$ であり、 $\sin n\theta_2 = \sin(n\pi - n\theta_1) = (-1)^{n+1} \sin n\theta_1$ である。また $\beta^n = (-\bar{\alpha})^n = (-1)^n \bar{\alpha}^n$ である。これらを用いると

$$A_n = \alpha^n \cos n\theta_1 + \beta^n \cos n\theta_2 = \alpha^n \cos n\theta_1 + \bar{\alpha}^n \cos n\theta_1$$

だから $A_n = (\alpha^n + \bar{\alpha}^n) \cos n\theta_1$ である。(1) より $\alpha^n + \bar{\alpha}^n$ は実数であり、 $\cos n\theta_1$ も実数なので、 A_n は実数である。

同様に

$$B_n = \alpha^n \sin n\theta_1 + \beta^n \sin n\theta_2 = \alpha^n \sin n\theta_1 - \bar{\alpha}^n \sin n\theta_1$$

だから $B_n = (\alpha^n - \bar{\alpha}^n) \sin n\theta_1$ である。(1) より $\alpha^n - \bar{\alpha}^n$ は純虚数であり、 $\sin n\theta_1$ は実数なので、 B_n は純虚数である。

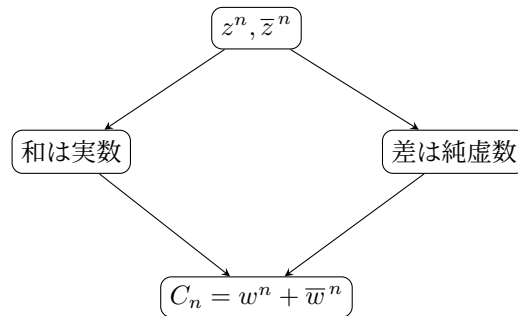
よって A_n は実数、 B_n は純虚数 である。

(b) $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$, $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ とおく。 $\theta_2 = \pi - \theta_1$ だから $z_2 = -\cos \theta_1 + i \sin \theta_1 = -\overline{z_1}$ である。また $\beta = -\overline{\alpha}$ より $\beta z_2 = (-\overline{\alpha})(-\overline{z_1}) = \overline{\alpha z_1}$ となる。

したがって

$$C_n = (\alpha z_1)^n + (\beta z_2)^n = (\alpha z_1)^n + \overline{(\alpha z_1)^n}$$

である。(1) を $z = \alpha z_1$ に適用すれば、この和は実数である。よって C_n は実数である。



▶ 解法 2

【方針】

極形式で共役を表し、和が余弦、差が正弦に比例することを使う。(2) では $\beta = -\overline{\alpha}$ と $z_2 = -\overline{z_1}$ の二つの符号が打ち消し合う。

【解答】

(1) $z = re^{i\varphi}$ とおく。任意の整数 n に対し

$$z^n + \bar{z}^n = 2r^n \cos n\varphi$$

は実数であり

$$z^n - \bar{z}^n = 2ir^n \sin n\varphi$$

は 0 または純虚数である。

(2) $\theta_2 = \pi - \theta_1$, $\beta = -\overline{\alpha}$ だから

$$\begin{aligned} A_n &= (\alpha^n + \overline{\alpha}^n) \cos n\theta_1, \\ B_n &= (\alpha^n - \overline{\alpha}^n) \sin n\theta_1. \end{aligned}$$

前者は実数、後者は 0 または純虚数である。また

$$z_2 = -\overline{z_1}, \quad \beta z_2 = \overline{\alpha z_1}.$$

したがって

$$C_n = (\alpha z_1)^n + \overline{(\alpha z_1)^n}$$

は実数である。

【総評】 難度は 6、計算量は 5。目安時間は 18 分。任意の整数には負の整数も含まれるため、共役と負の整数乗が交換できることを $ze0$ のもとで確認する。(2) は $\beta = -\overline{\alpha}$, $z_2 = -\overline{z_1}$ を早めに使う。記号は問題文どおり A_n, B_n, C_n に統一する。

【第 3 問】

関数 $f(x) = 3x + 6\sin x$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で 2 つの極値 $f(a)$, $f(b)$ ($a < b$) をもつ. また, $y = g(x)$ を点 $(b, f(b))$ を通る傾き 3 の直線とする. つぎの各問に答えよ.

- (1) $f(a)$ および $f(b)$ を求めよ.
- (2) 関数 $g(c) = f(a)$ を満たす c を求めよ.
- (3) 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (4) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq b$),
線分 $y = g(x)$ ($b \leq x \leq 2\pi$),
直線 $y = d$ (ただし, d は定数で, $d = g(2\pi)$),
および y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに回転してできる器を考える. この器の縁 ($x = 2\pi$ の円周上) から静かに水を入れるとき, 器の底 (原点) に水が達するまでに水はどのくらい入るか.

▶ 解法 1

【方針】

導関数から極大点・極小点を求め、直線 g と水がせき止められる高さを確定する。体積は y 軸まわりの円筒殻として、曲線が底になる区間と直線が底になる区間に分けて積分する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 3 + 6\cos x = 3(1 + 2\cos x)$$

より、極大点と極小点はそれぞれ

$$a = \frac{2\pi}{3}, \quad b = \frac{4\pi}{3}$$

である。したがって

$$f(a) = 2\pi + 3\sqrt{3}, \quad f(b) = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

(2) $(b, f(b))$ を通る傾き 3 の直線は

$$g(x) = 3x - 3\sqrt{3}.$$

$g(c) = f(a)$ より

$$c = \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

(3) f' の符号は $(0, a)$ で正、 (a, b) で負、 $(b, 2\pi)$ で正である。したがって f は極大点 $(a, f(a))$ 、極小点 $(b, f(b))$ を通る。 g は極小点を通る傾き 3 の直線である。

(4) 水面が高さ $f(a)$ に達すると左側の山を越えて原点へ流れる。直前の水の体積を円筒殻で表すと

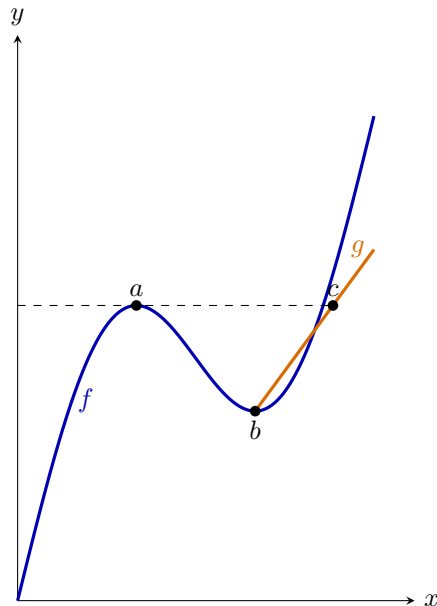
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x \{f(a) - f(x)\} dx \\ &\quad + 2\pi \int_b^c x \{f(a) - g(x)\} dx. \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} x(2\pi + 3\sqrt{3} - 3x - 6\sin x) dx \\ &\quad + 2\pi \int_{4\pi/3}^{2\pi/3+2\sqrt{3}} x(2\pi + 6\sqrt{3} - 3x) dx. \\ \int x \sin x dx &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

を用いて計算すると

$$V = 4\pi \left(-\sqrt{3}\pi^2 + 5\pi + 9\sqrt{3} \right).$$



▶ 解法 2

【方針】

水の断面を高さ $f(a)$ と底面の差として捉え、回転体の一次モーメントを区間ごとにまとめて計算する。積分の端点で $\sin, \cos$ の値を先に表にして計算量を抑える。

【解答】

(1)

$$a = \frac{2\pi}{3}, \quad b = \frac{4\pi}{3},$$

したがって

$$f(a) = 2\pi + 3\sqrt{3}, \quad f(b) = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

(2) $g(x) = 3x - 3\sqrt{3}$ なので

$$c = \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

(3) f は 0 から a まで増加、 a から b まで減少、 b から 2π まで増加する。 g は $(b, f(b))$ を通る傾き 3 の直線として描く。

(4) 水面が $f(a)$ に達する直前の体積は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x \{f(a) - f(x)\} dx \\ &\quad + 2\pi \int_b^c x \{f(a) - g(x)\} dx. \end{aligned}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$$

を用い、 $a = 2\pi/3$, $b = 4\pi/3$, $c = 2\pi/3 + 2\sqrt{3}$ を代入して整理すると

$$V = 4\pi \left(-\sqrt{3}\pi^2 + 5\pi + 9\sqrt{3} \right).$$

【総評】 難度は 8、計算量は 8。目安時間は 28 分。(1) で問われるのは極値 $f(a), f(b)$ 、(2) で問われるのは c であり、点の座標と設問番号を混同しない。水が底へ達する直前の水面は局所極大の高さ $f(a)$ である。回転半径 x を掛けた円筒殻を、曲線区間と直線区間に分けて積分する。

【第 4 問】

赤と白のランプが一つずつある．それぞれのランプは，1 秒ごとにある規則にしたがって点灯または消灯し，1 秒間その状態を保持する．時刻 0 秒から実験を開始する．以下， m, n は 0 以上の整数とする．

(1) 両方のランプとも，以下の規則 R_1, R_2 にしたがうとする．

R_1 : 時刻 m 秒からの 1 秒間に点灯している場合，時刻 $m+1$ 秒で消灯する確率は p である．

R_2 : 時刻 m 秒からの 1 秒間に消灯している場合，時刻 $m+1$ 秒で点灯する確率は p である．

時刻 0 秒からの 1 秒間，白は消灯，赤は点灯しているとする．このとき，つぎの各問に答えよ．

(a) 時刻 n 秒からの 1 秒間に白のランプが点灯している確率を求めよ．

(b) 時刻 n 秒からの 1 秒間に少なくとも一方のランプが点灯している確率を求めよ．

(2) つぎに，規則を以下の R'_1, R'_2, R'_3 のように変更した．

R'_1 : 時刻 m 秒からの 1 秒間，両方が消灯している場合には，時刻 $m+1$ 秒ではどちらか一方が点灯する．白が消灯する確率は p である．

R'_2 : 時刻 m 秒からの 1 秒間，どちらか一方だけが点灯している場合には，時刻 $m+1$ 秒で残りのランプが点灯するか，あるいは，点灯しているランプが消灯する．残りのランプが点灯する確率は p である．

R'_3 : 時刻 m 秒からの 1 秒間，両方が点灯している場合には，時刻 $m+1$ 秒ではどちらか一方が消灯する．赤が消灯する確率は p である．

時刻 0 秒からの 1 秒間，白は消灯，赤は点灯しているとする．このとき，つぎの各問に答えよ．

(a) 時刻 n 秒からの 1 秒間に白のランプが点灯している確率を求めよ．

(b) 時刻 n 秒からの 1 秒間に少なくとも一方のランプが点灯している確率を求めよ．

▶ 解法 1

【方針】

(1) は各ランプを独立な 2 状態過程として扱う．(2) は 4 状態を「一方だけ点灯」と「両方同状態」に分け，偶数時刻と奇数時刻の交互構造を利用する．

【解答】

(1) 白の点灯確率を w_n とすると

$$w_{n+1} = (1-p)w_n + p(1-w_n) = p + (1-2p)w_n, \quad w_0 = 0.$$

よって

$$w_n = \frac{1 - (1-2p)^n}{2}.$$

これが (a) の答えである．

赤の消灯確率も w_n 、白の消灯確率は

$$\frac{1 + (1-2p)^n}{2}$$

である．二つの動きは独立だから，(b) の確率は

$$1 - \frac{1 + (1-2p)^n}{2} \cdot \frac{1 - (1-2p)^n}{2} = \frac{3 + (1-2p)^{2n}}{4}.$$

(2) 時刻 0 では赤だけが点灯している．一方だけ点灯している状態からは，確率 p で両方点灯，確率 $1-p$ で両方消灯へ移る．両方が同じ状態からは，次に必ず一方だけ点灯する．したがって偶数時刻には一方だけ，奇数時刻には両方点灯または両方消灯となる．

奇数時刻には両方点灯の確率が p なので，白の点灯確率は p である．偶数時刻 $n \geq 2$ では，直前の両方消灯から白だけ点灯する確率は $1-p$ 、直前の両方点灯から赤が消灯して白だけになる確率は p である．よって (a) は

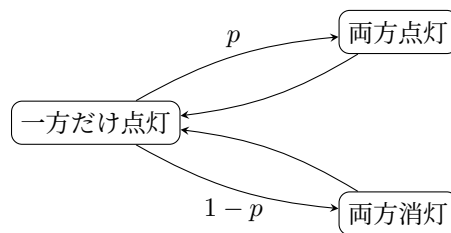
$$\begin{cases} 0 & (n=0), \\ p & (n \text{ が奇数}), \\ p^2 + (1-p)^2 & (n \geq 2 \text{ が偶数}) \end{cases}$$

である．

(b) は、偶数時刻なら確率 1、奇数時刻なら両方点灯の場合だけなので

$$\begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}), \\ p & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。



偶数時刻と奇数時刻で状態型が交互に変わる

▶ 解法 2

【方針】

各 1 秒の遷移ではなく 2 秒ごとの遷移をまとめる。(1) は点灯確率の平衡値との差が毎秒 $1 - 2p$ 倍になる。(2) は偶数時刻と奇数時刻で状態の型が完全に分かれる。

【解答】

(1) 白の点灯確率を w_n とすると

$$w_{n+1} - \frac{1}{2} = (1 - 2p) \left(w_n - \frac{1}{2} \right), \quad w_0 = 0.$$

よって

$$w_n = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}.$$

赤の消灯確率も同じ値である。両ランプは独立だから、少なくとも一方が点灯する確率は

$$1 - \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \cdot \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} = \frac{3 + (1 - 2p)^{2n}}{4}.$$

(2) 偶数時刻には必ず一方だけが点灯し、奇数時刻には両方点灯または両方消灯である。奇数時刻に両方点灯する確率は常に p である。

したがって白の点灯確率は

$$\begin{cases} 0 & (n = 0), \\ p & (n \text{ が奇数}), \\ p^2 + (1 - p)^2 & (n \geq 2 \text{ が偶数}), \end{cases}$$

少なくとも一方が点灯する確率は

$$\begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}), \\ p & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。

【総評】 難度は 7、計算量は 6。目安時間は 22 分。(1) は二つのランプが独立だが、(2) は全体状態に依存するため独立として扱えない。原本の R'_1 は「白が消灯する確率が p 」である。(2a) は $n = 0$ を偶数一般と分ける必要があり、偶数の正の時刻では $p^2 + (1 - p)^2$ になる。