

入 学 試 験 問 題

数 学



名古屋大学 2003 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

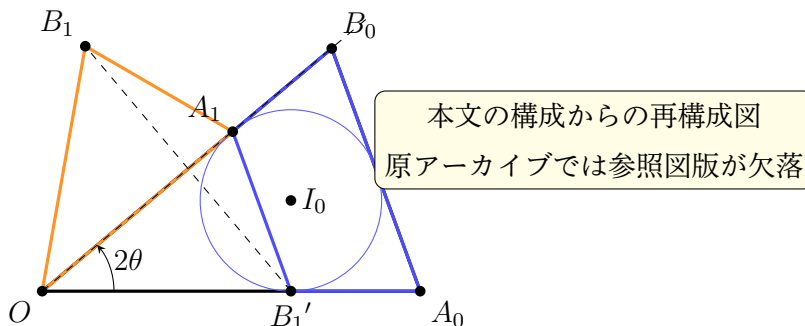
第 1 問

座標平面上に、原点 O 、点 $A_0(l_0, 0)$ 、 O からの距離が l_0 である点 B_0 （この点の y 座標は正の値とする）の 3 点からなる二等辺三角形 OA_0B_0 を考える．ここで、 $\angle A_0OB_0 = 2\theta$ とする．この二等辺三角形 OA_0B_0 に内接する円の中心を I_0 とし、半径を r_0 とする．この円に外接する台形 $A_0B_0A_1B_1'$ を考え（点 A_1 は辺 OB_0 上、点 B_1' は辺 OA_0 上にあるものとする）、辺 OB_0 に関して点 B_1' を対称移動した点を B_1 とおく．つぎに $\triangle OA_1B_1$ の内接円を描き、その中心を I_1 、半径を r_1 とする．同様の作業を n 回繰り返してできる $\triangle OA_nB_n$ およびその内接円（中心を I_n 、半径を r_n とする）を考える（下図参照）．ここで、辺 OA_n の長さを l_n とする．つぎの各問に答えよ．

- (1) r_0 を l_0 および θ を用いて表せ．
- (2) l_n を l_0 、 θ および n を用いて表せ．
- (3) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を l_0 、 θ および n を用いて表せ．
- (4) $\triangle OA_nB_n$ の内接円の面積 S_n を l_0 、 θ および n を用いて表せ．
- (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i$$

を l_0 および θ を用いて表せ．



第 2 問

$a > 1$, $b > 0$, $a^2 - b^2 = 1$ の場合, 媒介変数 θ を用いて

$$x = \frac{b}{a - \cos \theta}, \quad y = \frac{\sin \theta}{a - \cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

で表される座標平面上の曲線 C についてつぎの各問に答えよ.

- (1) 曲線 C の方程式を求め, 図示せよ.
- (2) 曲線 C 上の点でその y 座標が最大となる点 $P(x_P, y_P)$ を求めよ.
- (3) 曲線 C 上の点 A における接線が原点 O を通るとき, 点 A の座標 (x_A, y_A) を求めよ.
- (4) 原点 O , 点 A , 点 $B(x_A, 0)$ を頂点とする $\triangle OAB$ の面積を最大とする a, b の値を求め, このときの点 A の座標と $\triangle OAB$ の面積を求めよ.

第 3 問

$x^2 + y^2 = a^2$ で表される図形の $y \leq 0$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器 A と、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で表される図形の $y \leq 0$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器 B がある。いずれの容器にも水がいっぱいに満たされているとする。これらの容器をそれぞれゆっくりと傾けて水を出すとき、つぎの各問に答えよ。ただし、 $a, b > 0$ とする。

- (1) 容器 A を角度 θ ラジアン $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ だけ傾けたときの水面の面積 $S_A(\theta)$ を求めよ。
- (2) 容器 A を傾け始めてから傾きが θ ラジアンになるまでに流れ出る水量 $W_A(\theta)$ を求めよ。
- (3) 容器 B を傾け始めてから傾きが ϕ ラジアンになるまでに流れ出る水量を $W_B(\phi)$ とする。

このとき、比

$$r = \frac{W_B\left(\frac{\pi}{2}\right)}{W_A\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

を求めよ。

- (4) $W_B(\phi) = rW_A(\theta)$ となるとき、 $\tan \theta$ を ϕ の関数として求めよ。

第 4 問

円周上に n 個の異なる点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ をとり, これら n 個の点を要素とする集合を U とする (ただし, $n \geq 4$). U 内のすべての異なる 2 点間に線分を引くものとする. 各線分を各々独立に, 赤, 青, 黄のいずれかに等確率で着色する. つぎの (1)~(6) の各問に答えよ.

- (1) 上記の線分の数を求めよ.
- (2) すべての線分が同一色で着色されている確率を求めよ.

いま事象 A_1, A_2, A_3, A_4 を

$A_1: \{a_1, a_2, a_3\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが, 同一色で着色されている

$A_2: \{a_2, a_3, a_4\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが, 同一色で着色されている

$A_3: \{a_3, a_4, a_1\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが, 同一色で着色されている

$A_4: \{a_4, a_1, a_2\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが, 同一色で着色されている

とする.

また事象 B を

$B: \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 内のどの 3 個の点を選んでも, それらを結んでいる線分の色は 2 色以上である

とする.

- (3) 事象 A_1 の起こる確率 $P(A_1)$ を求めよ.
- (4) A_1, A_2 の余事象 $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ について, 確率 $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ を求めよ.
- (5) 事象 A_1, A_2, A_3, A_4 および記号 $\neg, \cap, \cup$ を使って, 事象 B を表現せよ.
- (6) 「和事象の確率は, 常に個々の事象の確率の和以下である」ことを用いて, $P(B) \geq \frac{5}{9}$ であることを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)