

名古屋大学 2003 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

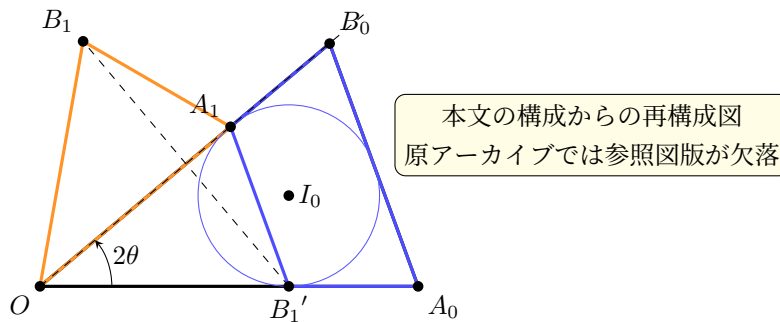
【第 1 問】

座標平面上に、原点 O 、点 $A_0(l_0, 0)$ 、 O からの距離が l_0 である点 B_0 (この点の y 座標は正の値とする) の 3 点からなる二等辺三角形 OA_0B_0 を考える。ここで、 $\angle A_0OB_0 = 2\theta$ とする。この二等辺三角形 OA_0B_0 に内接する円の中心を I_0 とし、半径を r_0 とする。この円に外接する台形 $A_0B_0A_1B_1'$ を考え (点 A_1 は辺 OB_0 上、点 B_1' は辺 OA_0 上にあるものとする)、辺 OB_0 に関して点 B_1' を対称移動した点を B_1 とおく。つぎに $\triangle OA_1B_1$ の内接円を描き、その中心を I_1 、半径を r_1 とする。同様の作業を n 回繰り返してできる $\triangle OA_nB_n$ およびその内接円 (中心を I_n 、半径を r_n とする) を考える (下図参照)。ここで、辺 OA_n の長さを l_n とする。つぎの各問に答えよ。

- (1) r_0 を l_0 および θ を用いて表せ。
- (2) l_n を l_0 、 θ および n を用いて表せ。
- (3) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を l_0 、 θ および n を用いて表せ。
- (4) $\triangle OA_nB_n$ の内接円の面積 S_n を l_0 、 θ および n を用いて表せ。
- (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i$$

を l_0 および θ を用いて表せ。



▶ 解法 1

【方針】

各段階の三角形は、頂角が常に 2θ の二等辺三角形で相似である。まず二等辺三角形の面積と半周長から内接円の半径を出す。内接円が辺に接する点までの距離は $r \cot \theta$ で、これが次の三角形の辺長 l_{n+1} になるため、 $l_{n+1} = l_n(1 - \sin \theta)$ と分かる。あとは辺の向きが毎回 2θ ずつ回転すること、内接円面積が l_n^2 に比例することを使い、座標と面積和を等比数列で表す。

【解答】

(1) $\triangle OA_0B_0$ は $OA_0 = OB_0 = l_0$ 、 $\angle A_0OB_0 = 2\theta$ の二等辺三角形である。その面積は $\frac{1}{2}l_0^2 \sin 2\theta = l_0^2 \sin \theta \cos \theta$ である。また底辺は $A_0B_0 = 2l_0 \sin \theta$ なので、半周長は $\frac{l_0 + l_0 + 2l_0 \sin \theta}{2} = l_0(1 + \sin \theta)$ である。

三角形の面積は「内接円の半径 $\times$ 半周長」に等しいから $r_0 = \frac{l_0^2 \sin \theta \cos \theta}{l_0(1 + \sin \theta)}$ である。よって $r_0 = \frac{l_0 \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$ である。

(2) 一般に、辺の長さが l_n 、頂角が 2θ の二等辺三角形 OA_nB_n を考える。その内接円の半径は (1) と同様に $r_n = \frac{l_n \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$ である。

内心は角の二等分線上にあり、内接円が辺 OA_n に接する点までの距離は $r_n \cot \theta$ である。したがって、次の三角形の辺長は

$$l_{n+1} = r_n \cot \theta = \frac{l_n \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$= l_n \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = l_n(1 - \sin \theta)$ である。よって $l_n = l_0(1 - \sin \theta)^n$ である。

(3) 点 A_0 は正の x 軸上にある。構成により、 OA_n の向きは OA_0 から $2n\theta$ だけ回転している。したがって $A_n = (x_n, y_n)$ は、長さ l_n 、偏角 $2n\theta$ の点である。よって (2) より

$$(x_n, y_n) = (l_0(1 - \sin \theta)^n \cos 2n\theta, l_0(1 - \sin \theta)^n \sin 2n\theta)$$

である。

(4) (2) で述べた通り $r_n = \frac{l_n \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$ である。 $l_n = l_0(1 - \sin \theta)^n$ を代入すると $r_n = \frac{l_0(1 - \sin \theta)^n \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$ である。したがって内接円の面積 S_n は

$$S_n = \pi \left\{ \frac{l_0(1 - \sin \theta)^n \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right\}^2$$

である。

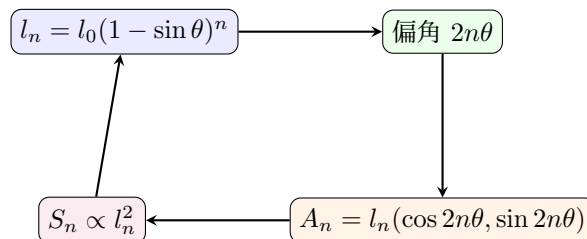
(5) (4) より S_n は公比 $(1 - \sin \theta)^2$ の等比数列である。 $0 < \theta < \pi/2$ なので $0 < 1 - \sin \theta < 1$ であり、和は収束する。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i = \frac{S_0}{1 - (1 - \sin \theta)^2}$$

である。ここで $S_0 = \pi \left\{ \frac{l_0 \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right\}^2$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i = \frac{\pi l_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 + \sin \theta)^2 \{1 - (1 - \sin \theta)^2\}}$$

である。



▶ 解法 2 (複素数平面で縮小と回転をまとめる)

【方針】

点 A_n を複素数 z_n で表す。1 回の操作が長さを $1 - \sin \theta$ 倍し、向きを 2θ 回転するので、 z_n は複素等比数列になる。

【解答】

(1)

半周長と面積は

$$l_0(1 + \sin \theta), \quad l_0^2 \sin \theta \cos \theta$$

だから

$$r_0 = \frac{l_0 \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}.$$

(2)

内接円の接点までの距離は

$$r_n \cot \theta = l_n \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = l_n(1 - \sin \theta).$$

したがって

$$l_n = l_0(1 - \sin \theta)^n.$$

(3)

複素数平面で A_n に対応する複素数を z_n とする。反射を含む 1 回の操作で、辺の向きは 2θ 回転する。よって

$$z_{n+1} = (1 - \sin \theta)e^{2i\theta} z_n, \quad z_0 = l_0.$$

したがって

$$z_n = l_0(1 - \sin \theta)^n e^{2in\theta}.$$

実部と虚部を取れば

$$(x_n, y_n) = (l_0(1 - \sin \theta)^n \cos 2n\theta, l_0(1 - \sin \theta)^n \sin 2n\theta).$$

(4)

$$r_n = \frac{l_0(1 - \sin \theta)^n \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

より

$$S_n = \pi r_n^2.$$

(5)

S_n の公比は $(1 - \sin \theta)^2$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i &= \frac{S_0}{1 - (1 - \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\pi l_0^2 \sin \theta (1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(2 - \sin \theta)}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 25～30 分。相似な二等辺三角形が一定比で縮小しながら 2θ ずつ回転する構造を読む問題である。原アーカイブでは本文が参照する図版が欠落していたため、本文に明示された接点・反射・頂角だけから再構成した図を注記付きで掲載した。接点までの距離 $r_n \cot \theta = l_n(1 - \sin \theta)$ を得るところが核心であり、以後は座標と円面積の等比和になる。

【第 2 問】

$a > 1$, $b > 0$, $a^2 - b^2 = 1$ の場合、媒介変数 θ を用いて

$$x = \frac{b}{a - \cos \theta}, \quad y = \frac{\sin \theta}{a - \cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

で表される座標平面上の曲線 C についてつぎの各問に答えよ。

- (1) 曲線 C の方程式を求め、図示せよ。
- (2) 曲線 C 上の点でその y 座標が最大となる点 $P(x_P, y_P)$ を求めよ。
- (3) 曲線 C 上の点 A における接線が原点 O を通るとき、点 A の座標 (x_A, y_A) を求めよ。
- (4) 原点 O , 点 A , 点 $B(x_A, 0)$ を頂点とする $\triangle OAB$ の面積を最大とする a, b の値を求め、このときの点 A の座標と $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

媒介変数表示から $\cos \theta = a - b/x$, $\sin \theta = by/x$ を得て、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると円の方程式になる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ なので曲線はその円の上半分である。(3) は原点から円に引いた接線の接点を求める問題で、半径と接線が直交する条件を使う。(4) は面積 $b/(2a^2)$ を $a^2 - b^2 = 1$ のもとで最大化する。

【解答】

(1) 与えられた式から $x = \frac{b}{a - \cos \theta}$ である。したがって $a - \cos \theta = \frac{b}{x}$ であり、 $\cos \theta = a - \frac{b}{x}$ である。また $y = \frac{\sin \theta}{a - \cos \theta} = \frac{x}{b} \sin \theta$ だから $\sin \theta = \frac{by}{x}$ である。

これらを $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入すると $\left(a - \frac{b}{x}\right)^2 + \left(\frac{by}{x}\right)^2 = 1$ である。両辺に x^2 を掛けると $a^2 x^2 - 2abx + b^2 + b^2 y^2 = x^2$ である。 $a^2 - b^2 = 1$ 、すなわち $a^2 - 1 = b^2$ を用いると $b^2 x^2 - 2abx + b^2 + b^2 y^2 = 0$ となる。 $b > 0$ なので b^2 で割って $x^2 + y^2 - \frac{2a}{b}x + 1 = 0$ である。平方完成して $\left(x - \frac{a}{b}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{b^2}$ を得る。

また $0 \leq \theta \leq \pi$ では $\sin \theta \geq 0$ であり、 $a - \cos \theta > 0$ だから $y \geq 0$ である。よって曲線 C は、中心 $(a/b, 0)$ 、半径 $1/b$ の円の上半分である。

(2) (1) の円の上半分で y 座標が最大となるのは、円の最上点である。したがって $P\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$ である。

(3) 円の中心を $C_0 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$ とする。原点 O を通る接線の接点を $A(x_A, y_A)$ とする。接線 OA は半径 C_0A と直交するので $\left(x_A - \frac{a}{b}, y_A\right) \cdot (x_A, y_A) = 0$ である。すなわち

$$x_A^2 + y_A^2 - \frac{a}{b}x_A = 0 \quad (1)$$

である。

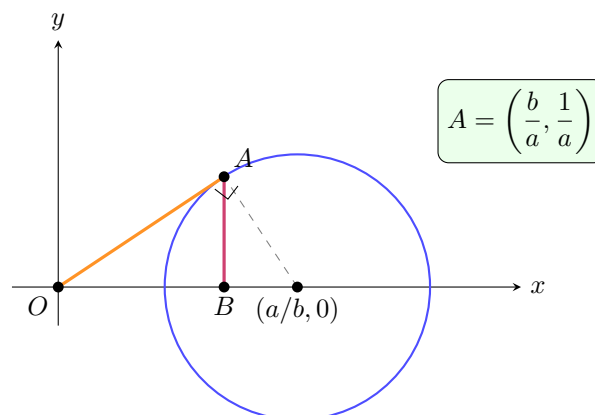
一方、 A は円上にあるので

$$x_A^2 + y_A^2 - \frac{2a}{b}x_A + 1 = 0 \quad (2)$$

である。(2) から (1) を引くと $-\frac{a}{b}x_A + 1 = 0$ だから $x_A = \frac{b}{a}$ である。これを (1) に代入すると $\frac{b^2}{a^2} + y_A^2 - \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 0$ すなわち $y_A^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}$ である。上半分なので $y_A > 0$ であり、 $A\left(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$ である。

(4) 点 B は $(x_A, 0)$ だから、三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}x_A y_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{2a^2}$ である。 $a^2 - b^2 = 1$ より $b^2 = a^2 - 1$ である。面積は正なので、面積の 2 乗を最大にすればよい。 $\left(\frac{b}{2a^2}\right)^2 = \frac{a^2 - 1}{4a^4}$ である。ここで $u = a^2$ とおくと、 $a > 1$ より $u > 1$ であり、最大化すべき式は $\frac{u-1}{4u^2}$ である。定数 $\frac{1}{4}$ を除き $g(u) = \frac{u-1}{u^2}$ とおくと $g'(u) = \frac{u^2 - 2u(u-1)}{u^4} = \frac{2-u}{u^3}$ である。したがって $u = 2$ で最大となる。

よって $a^2 = 2$, $b^2 = 1$ であり、 $a > 1, b > 0$ から $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ である。このとき $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ であり、面積は $\frac{1}{4}$ である。



▶ 解法 2 (媒介変数の接線条件を直接使用)

【方針】

円へ直した後の幾何解法とは別に、媒介変数表示を微分する。接線が原点を通る条件を行列式 $xy' - yx' = 0$ で表すと、接点の媒介変数が直ちに決まる。

【解答】

(1)

$$\cos \theta = a - \frac{b}{x}, \quad \sin \theta = \frac{by}{x}$$

を $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ へ代入すると

$$\left(x - \frac{a}{b}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{b^2}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ なので、これは上半円である。

(2)

円の最上点から

$$P\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$$

である。

(3)

$D = a - \cos \theta$ とおくと

$$x = \frac{b}{D}, \quad y = \frac{\sin \theta}{D}.$$

微分して

$$x' = -\frac{b \sin \theta}{D^2}, \quad y' = \frac{a \cos \theta - 1}{D^2}.$$

接線が原点を通るための条件は、位置ベクトルと接線方向が平行であること、すなわち

$$xy' - yx' = 0$$

である。左辺を整理すると

$$xy' - yx' = \frac{b \cos \theta}{D^2}.$$

したがって $\cos \theta = 0$ 、よって $\theta = \pi/2$ であり、

$$A\left(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

を得る。

(4)

$$[OAB] = \frac{1}{2}x_A y_A = \frac{b}{2a^2}.$$

$b^2 = a^2 - 1$ を使い、 $u = a^2 > 1$ とおくと

$$[OAB]^2 = \frac{u-1}{4u^2}.$$

微分すれば最大は $u = 2$ で生じる。したがって

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 1, \quad A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad [OAB]_{\max} = \frac{1}{4}.$$

【総評】 媒介変数を消去して円に直し、円の接線条件と 1 変数最大化へ進む問題である。目安時間は 20~25 分。(1) では $a^2 - b^2 = 1$ を使うときに中心 $(a/b, 0)$ 、半径 $1/b$ を正確に出すこと、また $0 \leq \theta \leq \pi$ から上半分だけであることを書く。(3) では接線と半径の直交条件を使うと、接点座標が短く求まる。(4) は面積そのものより 2 乗を最大化すると根号を避けられ、 $u = a^2$ の微分で整理できる。

【第 3 問】

$x^2 + y^2 = a^2$ で表される図形の $y \leq 0$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器 A と、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で表される図形の $y \leq 0$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器 B がある. いずれの容器にも水がいっぱいに満たされているとする. これらの容器をそれぞれゆっくりと傾けて水を出すとき、つぎの各問に答えよ. ただし、 $a, b > 0$ とする.

- (1) 容器 A を角度 θ ラジアン $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ だけ傾けたときの水面の面積 $S_A(\theta)$ を求めよ.
- (2) 容器 A を傾け始めてから傾きが θ ラジアンになるまでに流れ出る水量 $W_A(\theta)$ を求めよ.
- (3) 容器 B を傾け始めてから傾きが ϕ ラジアンになるまでに流れ出る水量を $W_B(\phi)$ とする. このとき、比

$$r = \frac{W_B\left(\frac{\pi}{2}\right)}{W_A\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

を求めよ.

- (4) $W_B(\phi) = rW_A(\theta)$ となるときの、 $\tan \theta$ を ϕ の関数として求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

球では水面を中心から距離 $a \sin \theta$ の平面切断として扱い、断面積を積分して流出量を求める。楕円体は y 方向の拡大縮小で球へ移し、体積比と切断面までの無次元距離を比較する。

【解答】

(1)

容器 A は半径 a の球の下半分である。角度 θ だけ傾けて水が静止したとき、水面は傾いた縁の最も低い点を通る平面になる。この平面と球の中心との距離は $a \sin \theta$ である。

したがって水面の円の半径は

$$\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a \cos \theta$$

である。よって

$$S_A(\theta) = \pi a^2 \cos^2 \theta.$$

(2)

球の中心から水面へ向かう座標を u とする。距離 u の平面による球の断面積は $\pi(a^2 - u^2)$ であるから、

$$\begin{aligned} W_A(\theta) &= \int_0^{a \sin \theta} \pi(a^2 - u^2) du \\ &= \pi \left[a^2 u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{a \sin \theta} \\ &= \frac{\pi a^3}{3} (3 \sin \theta - \sin^3 \theta). \end{aligned}$$

(3)

容器 B は、半径 a の球の下半分を y 方向へ b/a 倍した楕円体である。したがって体積は容器 A の b/a 倍である。角度 $\pi/2$ まで傾ければ、どちらも全量が流れ出るの

$$r = \frac{W_B(\pi/2)}{W_A(\pi/2)} = \frac{b}{a}.$$

(4)

$Y = ay/b$ とおくと、楕円体 B は半径 a の球へ移る。傾き ϕ の水面は、断面内で

$$x \sin \phi + y \cos \phi = a \sin \phi$$

と表せる。正規化後は

$$x \sin \phi + \frac{b}{a} Y \cos \phi = a \sin \phi.$$

この直線と原点との距離を as と書くと

$$s = \frac{a \sin \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}.$$

正規化した球で距離比 s までに流出する体積は

$$\frac{\pi a^3}{3} (3s - s^3)$$

であり、元の楕円体ではこれを b/a 倍する。したがって

$$W_B(\phi) = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^3}{3} (3s - s^3).$$

$r = b/a$ と (2) を使うと、条件 $W_B(\phi) = r W_A(\theta)$ は

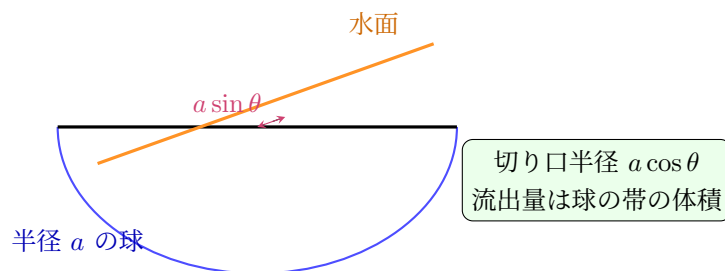
$$3s - s^3 = 3 \sin \theta - \sin^3 \theta$$

となる。関数 $3u - u^3$ は $0 \leq u \leq 1$ で単調増加するから

$$\sin \theta = s.$$

ゆえに

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{a}{b} \tan \phi.$$



▶ 解法 2 (正規化座標で流出量を直接比較)

【方針】

球・楕円体の両方で、流出部分を表す無次元距離 s を導入する。体積は共通関数 $3s - s^3$ になるため、単調性から距離比だけを比較できる。

【解答】

(1)

水面は球の中心から距離 $a \sin \theta$ の平面であり、切り口の半径は $a \cos \theta$ である。よって

$$S_A(\theta) = \pi a^2 \cos^2 \theta.$$

(2)

中心からの無次元距離を $s = \sin \theta$ とする。流出部分は球の断面積を積分して

$$\begin{aligned} W_A(\theta) &= \int_0^{as} \pi(a^2 - u^2) du \\ &= \frac{\pi a^3}{3} (3s - s^3). \end{aligned}$$

(3)

楕円体は半径 a の球を y 方向へ b/a 倍したものだから、全体積も b/a 倍である。直角まで傾けると全量が流出するので

$$r = \frac{b}{a}.$$

(4)

楕円体で $Y = ay/b$ と正規化すると球になる。傾き ϕ の水面に対応する平面の、球中心からの距離を as_ϕ とすると

$$s_\phi = \frac{a \sin \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}.$$

したがって

$$W_B(\phi) = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^3}{3} (3s_\phi - s_\phi^3).$$

$W_B(\phi) = rW_A(\theta)$ と $r = b/a$ から

$$3s_\phi - s_\phi^3 = 3\sin\theta - \sin^3\theta.$$

$3u - u^3$ は $0 \leq u \leq 1$ で単調増加するので

$$\sin\theta = s_\phi.$$

よって

$$\tan\theta = \frac{s_\phi}{\sqrt{1-s_\phi^2}} = \frac{a}{b} \tan\phi.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30～35 分。水面を球の平面切断とみなす空間把握と、楕円体を一方向の拡大縮小で球へ戻す発想が核心である。積分は独立行に置き、流出量を無次元量 s の共通関数 $3s - s^3$ で表した。最後はこの関数が $[0, 1]$ で単調増加することを明示して体積の等式から $\sin\theta = s$ を導き、 $\tan\theta = \frac{a}{b} \tan\phi$ へつながる。

【第 4 問】

円周上に n 個の異なる点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ をとり、これら n 個の点を要素とする集合を U とする (ただし、 $n \geq 4$)。 U 内のすべての異なる 2 点間に線分を引くものとする。各線分を各々独立に、赤、青、黄のいずれかに等確率で着色する。つぎの (1)～(6) の各問に答えよ。

(1) 上記の線分の数求めよ。

(2) すべての線分が同一色で着色されている確率を求めよ。

いま事象 A_1, A_2, A_3, A_4 を

A_1 : $\{a_1, a_2, a_3\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが、同一色で着色されている

A_2 : $\{a_2, a_3, a_4\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが、同一色で着色されている

A_3 : $\{a_3, a_4, a_1\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが、同一色で着色されている

A_4 : $\{a_4, a_1, a_2\}$ 内の任意の 2 点を結ぶ線分のすべてが、同一色で着色されている

とする。

また事象 B を

B : $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 内のどの 3 個の点を選んでも、それらを結んでいる線分の色は 2 色以上である

とする。

(3) 事象 A_1 の起こる確率 $P(A_1)$ を求めよ。

(4) A_1, A_2 の余事象 $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ について、確率 $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ を求めよ。

(5) 事象 A_1, A_2, A_3, A_4 および記号 $\overline{}, \cap, \cup$ を使って、事象 B を表現せよ。

(6) 「和事象の確率は、常に個々の事象の確率の和以下である」ことを用いて、 $P(B) \geq \frac{5}{9}$ であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1)(2) は完全グラフの辺数と、全辺同色の数え上げである。(3) 以降は 4 点の場合で、各 A_i は対応する 3 点を作る三角形の 3 辺が同じ色である事象を表す。(4) では A_1 と A_2 が共有する辺の色により、関係する 5 本の辺が同色にそろえることを使う。(5) は B が「どの三角形も単色でない」ことの言い換えであり、(6) はその余事象を和事象として上から評価する。

【解答】

(1) n 個の点のうち異なる 2 点を選ぶごとに 1 本の線分が引かれる。したがって線分の本数は $\frac{n(n-1)}{2}$ である。

(2) 線分の本数を $N = \frac{n(n-1)}{2}$ とする。すべての線分の色塗り方は 3^N 通りである。すべての線分が同一色である塗り方は、赤・青・黄の 3 通りである。よって求める確率は $\frac{3}{3^N} = 3^{1-N}$ である。

(3) 事象 A_1 は、3 点 a_1, a_2, a_3 を結ぶ 3 本の線分が同一色である事象である。この 3 本の塗り方は全部で 3^3 通りで、同一色となる塗り方は 3 通りである。したがって $P(A_1) = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$ である。

(4) まず $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2)$ である。ここで $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{9}$ である。

次に $A_1 \cap A_2$ を考える。 A_1 では辺 a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 が同一色であり、 A_2 では辺 a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4 が同一色である。両方に共通する辺 a_2a_3 があるため、この 5 本の辺 $a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4$ はすべて同一色でなければならない。残りの辺 a_1a_4 の色は自由である。したがって $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3 \cdot 3}{3^6} = \frac{1}{81}$ である。

よって $P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81} = \frac{17}{81}$ であり、

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - \frac{17}{81} = \frac{64}{81}$$

である。

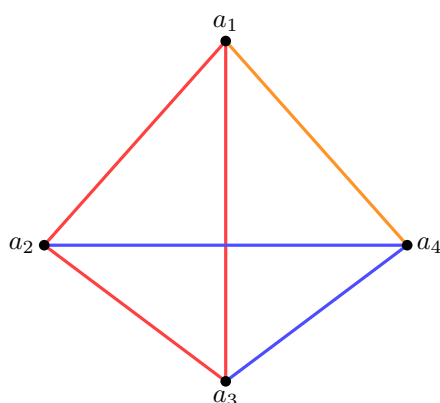
(5) 事象 B は、4 点からどの 3 点を選んでも、その 3 点を結ぶ 3 本の線分が同一色ではない、という事象である。これは A_1, A_2, A_3, A_4 のどれも起こらないことを意味する。したがって

$$B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$$

である。

(6) (5) より $B = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ である。したがって $P(B) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ である。

和事象の確率は個々の事象の確率の和以下であるから $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$ である。各 A_i の確率は $\frac{1}{9}$ なので $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \leq 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ である。よって $P(B) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ である。



A_i : 対応する三角形が単色
 $B = \bigcap_{i=1}^4 \overline{A_i}$

▶ 解法 2 (包除原理で $P(B)$ も正確に数える)

【方針】

(1)~(5) の基本結果を確認した後、4 つの単色三角形事象の和を包除原理で正確に数える。問題の下界より強い $P(B) = \frac{50}{81}$ が得られる。

【解答】

(1)

線分は異なる 2 点の選び方と同数なので

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

本である。

(2)

$N = n(n-1)/2$ とおく。全線分が同色である確率は

$$\frac{3}{3^N} = 3^{1-N}.$$

(3)

三角形の 3 辺が同色になる塗り方は 3 通り、全体は 3^3 通りだから

$$P(A_1) = \frac{1}{9}.$$

(4)

$A_1 \cap A_2$ では共有辺のため、関係する 5 辺が同じ色になり、残り 1 辺だけが自由である。よって

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3 \cdot 3}{3^6} = \frac{1}{81}.$$

したがって

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81} \right) = \frac{64}{81}.$$

(5)

$$B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}.$$

(6)

任意の 2 事象 A_i, A_j の共通部分の確率は $\frac{1}{81}$ である。任意の 3 事象、また 4 事象すべての共通部分では 6 辺が同色になり、その確率は $\frac{1}{243}$ である。包除原理により

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) &= \frac{4}{9} - \frac{6}{81} + \frac{4}{243} - \frac{1}{243} \\ &= \frac{31}{81}. \end{aligned}$$

よって

$$P(B) = 1 - \frac{31}{81} = \frac{50}{81} > \frac{5}{9}.$$

特に、問題で求められた $P(B) \geq 5/9$ が従う。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18~22 分。問題文の n の条件は画像上も後半の a_4 の使用からも $n \geq 4$ と読むべきであり、旧データの $n \leq 4$ を訂正した。共有辺をもつ 2 つの単色三角形が同時に起こると、関係する 5 辺が同色になる。第 1 解法では和事象の上界だけで $\frac{5}{9}$ を示し、第 2 解法では包除原理により正確な値 $P(B) = \frac{50}{81}$ まで確認した。