

名古屋大学 2006 年度 文系

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$0 \leq k \leq 1$ をみたす実数 k に対して, xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D , E , F を考える.

D は連立不等式 $y \geq x^2$, $y \leq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leq x^2$, $y \geq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leq -x^2 + 2x$, $y \geq kx$ で表される領域

(1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と, その最小値を求めよ.

【方針】

2 つの領域は放物線と直線で囲まれるので, まず交点をすべて整理し, 面積を積分で表す. 直線 $y = kx$ と $y = x^2$ の交点は $x = 0, k$, 直線 $y = kx$ と $y = -x^2 + 2x$ の交点は $x = 0, 2 - k$ である. $0 \leq k \leq 1$ では, D は $0 \leq x \leq k$ の細い部分, $E \cap F$ は $k \leq x \leq 1$ と $1 \leq x \leq 2 - k$ に分けて計算できる. 最後に得られた三次式を微分し, 端点と内部の臨界点を比較する.

【解答】

(1)

$0 \leq k \leq 1$ とする. $y = x^2$ と $y = kx$ は $x = 0, k$ で交わるから, D の面積は

$$\int_0^k (kx - x^2) dx = \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^k = \frac{k^3}{6}$$

である.

次に $E \cap F$ を考える. E では $y \leq x^2$, F では $y \geq kx$ かつ $y \leq -x^2 + 2x$ である. $0 \leq x \leq 1$ では $x^2 \leq -x^2 + 2x$, $1 \leq x \leq 2$ では $-x^2 + 2x \leq x^2$ であるから, 上端の曲線は $x = 1$ で入れ替わる. また $kx \leq x^2$ は $x \geq k$, $kx \leq -x^2 + 2x$ は $0 \leq x \leq 2 - k$ である. したがって

$$\begin{aligned} S_{E \cap F} &= \int_k^1 (x^2 - kx) dx + \int_1^{2-k} (-x^2 + 2x - kx) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{kx^2}{2} \right]_k^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{(2-k)x^2}{2} \right]_1^{2-k} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{k}{2} + \frac{k^3}{6} + \frac{(2-k)^3}{6} + \frac{1}{3} - \frac{k}{2} \\ &= k^2 - 2k + 1. \end{aligned}$$

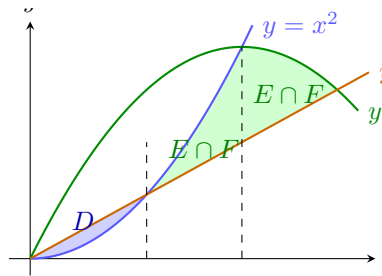
よって求める面積の和を $m(k)$ とすると $m(k) = \frac{k^3}{6} + k^2 - 2k + 1$ である.

(2)

微分すると $m'(k) = \frac{k^2}{2} + 2k - 2 = \frac{1}{2}\{k^2 + 4k - 4\}$ であり, $0 \leq k \leq 1$ にある臨界点は $k = -2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2$ だけである. さらに $m'(0) = -2 < 0$, $m'(1) = \frac{1}{2} > 0$ だから, この点で最小になる. 端点値を比べても $m(0) = 1$, $m(1) = \frac{1}{6}$ であり, 内部の臨界点が最小候補である. $a = 2\sqrt{2} - 2$ とおくと, $a^2 = 12 - 8\sqrt{2}$, $a^3 = 40\sqrt{2} - 56$ なので

$$\begin{aligned} m(a) &= \frac{40\sqrt{2} - 56}{6} + 12 - 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 + 1 \\ &= \frac{23 - 16\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

したがって最小値は $\frac{23 - 16\sqrt{2}}{3}$ であり, そのとき $k = 2\sqrt{2} - 2$ である.



$E \cap F$ の上端は $x = 1$ で 2 つの放物線の間を切り替わる。

【総評】 面積の式そのものは標準的だが、 $E \cap F$ の上端が $x = 1$ で x^2 から $-x^2 + 2x$ に変わる点を落とすと誤答になる。目安は 15 分前後で、交点、積分区間、微分後の端点確認を順に書ければ得点しやすい。特に D と $E \cap F$ を図で重ねて、 kx が下端になる範囲を先に確定してから計算するのが安定する。

【第 2 問】

xy 平面上に点 $A(2, 4)$ がある。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき、直線 l をピタリ直線と呼ぶことにする。

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピタリ直線 l があるとし、 l に関して A と対称な点を $A'(t, 0)$ とするとき、 p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) ピタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。

【方針】

反射の条件は、直線 l が点 A とその反射先 A' を結ぶ線分の垂直二等分線であることに言い換える。 A' が x 軸上にあるとして $A' = (t, 0)$ とおき、点 (p, q) が垂直二等分線上にある条件を距離の等式で表す。 t に関する二次方程式の実根の個数が、通れる直線の本数に対応するので、(1) は二次方程式、(2) は判別式、(3) は 2 本の直線の傾きの積で処理する。

【解答】

(1)

$A = (2, 4)$ が直線 l に関して x 軸上の点 $A' = (t, 0)$ に移るとする。このとき l は線分 AA' の垂直二等分線であるから、 (p, q) が l 上にある条件は $(p-2)^2 + (q-4)^2 = (p-t)^2 + q^2$ である。整理すると

$$\begin{aligned} p^2 - 4p + 4 + q^2 - 8q + 16 &= p^2 - 2pt + t^2 + q^2, \\ t^2 - 2pt + 4p + 8q - 20 &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって (1) の答は $t^2 - 2pt + 4p + 8q - 20 = 0$ である。

(2)

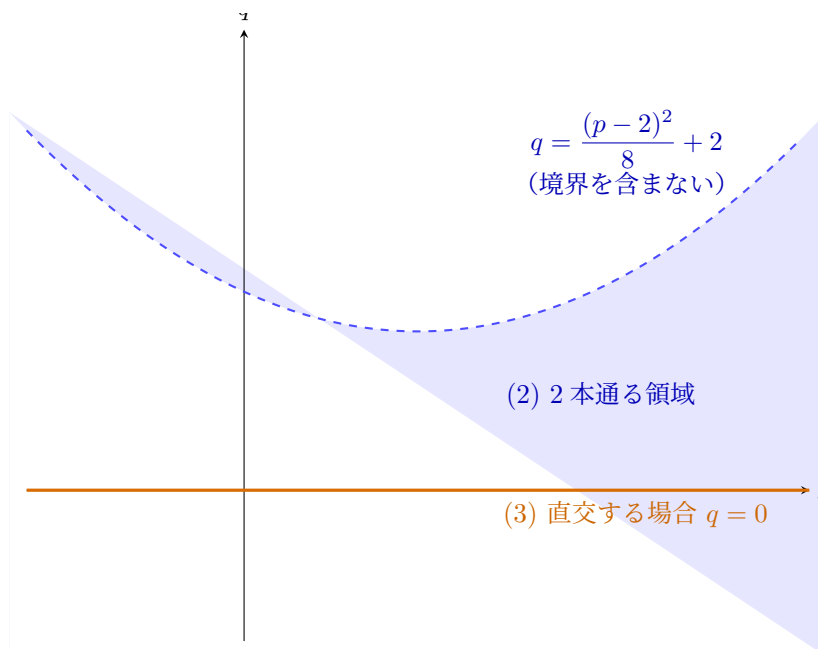
点 (p, q) を通るピタリ直線の本数は、この二次方程式の実数解 t の個数に等しい。異なる 2 本の直線が存在するための条件は判別式が正であること、すなわち $(-2p)^2 - 4(4p + 8q - 20) > 0$ である。これを整理すると $p^2 - 4p - 8q + 20 > 0$ であり、 $q < \frac{p^2 - 4p + 20}{8} = \frac{(p-2)^2}{8} + 2$ を得る。したがって求める領域は $q < \frac{(p-2)^2}{8} + 2$ である。

(3)

二次方程式の 2 つの根を t_1, t_2 とする。根 t_i に対応するピタリ直線は、垂直二等分線の式を整理すると

$$y = \frac{t_i - 2}{4}x + \frac{20 - t_i^2}{8}$$

となる。したがって、 $t_i = 2$ の場合も含め、その傾きは $\frac{t_i - 2}{4}$ である。2 本が直交するためには $\frac{t_1 - 2}{4} \cdot \frac{t_2 - 2}{4} = -1$ であればよい。つまり $(t_1 - 2)(t_2 - 2) = -16$ である。根と係数の関係より $t_1 + t_2 = 2p$, $t_1 t_2 = 4p + 8q - 20$ なので $(t_1 - 2)(t_2 - 2) = t_1 t_2 - 2(t_1 + t_2) + 4 = 8q - 16$ 。したがって $8q - 16 = -16$, すなわち $q = 0$ である。このとき判別式は $4\{(p-2)^2 + 16\} > 0$ で常に正だから、任意の p について 2 本の直交するピタリ直線が存在する。よって求める点 (p, q) の集合は $q = 0$ すなわち x 軸全体である。



【総評】 反射の問題を「垂直二等分線」に直すのが中心で、ここに気づけば計算は二次方程式の判別式と根と係数の関係で終わる。目安は 15 分程度。(3) では直線 l の傾きと線分 AA' の傾きを取り違いやすいので、垂直関係で傾きが逆数符号反転になることを一度明示すると安全である。別解は中点と傾きから直線方程式を直接作る方法もあるが、距離等式と同じ二次方程式に戻るだけなので、本解の形が最も簡潔である。

【第 3 問】

正六面体の各面に 1 つずつ、サイコロのように、1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて、次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする。」ただし、これらの 4 面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後、底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ ($n \geq 1$) で表す。 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

- (1) q_1, q_2 を求めよ。
- (2) q_n を q_{n-1} で表し、 q_n を求めよ。
- (3) $p_n(1)$ を求めよ。

【方針】

各面の番号そのものを追うと 6 状態になるが、向かい合う 2 面の和がどの組も 7 であることに注目すると、底面が 1 または 6 である確率だけを閉じた漸化式で扱える。底面がある向かい合う組に属するとき、次に出る底面は隣接する 4 面に限られ、残り 2 つの組へ移る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ になる。まず組の確率 q_n を求め、最後に組内で 1 : 6 の比に分かれることから p_n を出す。

【解答】

準備

向かい合う面の組を

$$A = \{1, 6\}, \quad B = \{2, 5\}, \quad C = \{3, 4\}$$

とする。どの組も番号の和は 7 である。底面がある組に属するとき、同じ組のもう一方の面は向かい側にあるので、次の底面にはならない。残る 2 組の番号和はどちらも 7 だから、次に各組へ移る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

(1)

初めは組 A の面 1 が底面であり、1 回後には組 A へ移れないから

$$q_1 = 0$$

である。2 回後に組 A へ戻る確率は、1 回後にいる組が B, C のどちらでも $\frac{1}{2}$ なので

$$q_2 = \frac{1}{2}$$

である。

(2)

初期状態も含めて $q_0 = 1$ とおく。組 A にいれば次は組 A に残らず、組 A 以外にいれば次に組 A へ移る確率は $\frac{1}{2}$ である。したがって

$$q_n = \frac{1 - q_{n-1}}{2} \quad (n \geq 1)$$

である。これを

$$q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(q_{n-1} - \frac{1}{3} \right)$$

と書き直すと、 $q_0 = 1$ より

$$q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

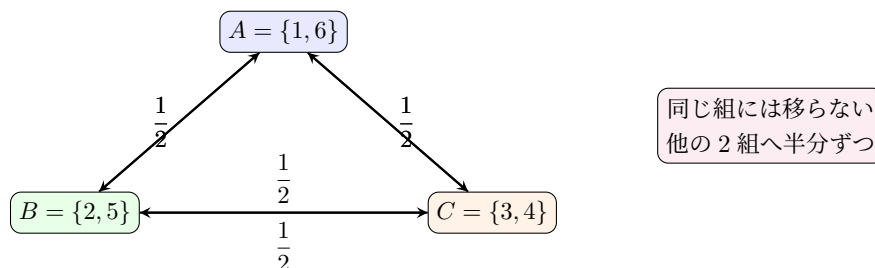
を得る。

(3)

組 A へ入るとき、面 1 と面 6 が選ばれる確率の比は 1 : 6 である。したがって $n \geq 1$ では

$$\begin{aligned} p_n(1) &= \frac{1}{7} q_n \\ &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} \left(-\frac{1}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

$n = 1$ では 0 となり、初回には元の面 1 にも向かい側の面 6 にも移れないことと一致する。



【総評】 6 面をそのまま追うより、向かい合う面の 3 組にまとめる発想が勝負である。目安は 15 分前後で、組の間の移動確率が $\frac{1}{2}$ ずつになる理由を「各組の番号和が 7」と書ければ、漸化式は短くまとまる。最後に $p_n = q_n/7$ とする部分では、組内の確率が等分ではなく 1 : 6 で分かれる点に注意する。