

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2006 年度理系（後期）

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

A , B 2つの町がある. 毎年1月1日に, A 町の前年の住民のうち4割が B 町に, B 町の前年の住民のうち2割が A 町に, それぞれ引っ越す (住民の数は十分に多く, 引っ越す住民の割合は正確に4割, 2割と見なしてよい). それ以外には住民の移動はなく, A 町, B 町両方をあわせた住民の数は不変である. 次の各問に答えよ.

- (1) ある年の末に A 町と B 町それぞれに住んでいる住民の数を a_0 , b_0 とする. 1年後に A 町と B 町それぞれに住んでいる住民の数 a_1 , b_1 を表す式を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 2×2 の行列 M を具体的に示せ.

- (2) 以下の式を満足する実数 α , β の値を求めよ. ただし E は 2×2 の単位行列である.

$$M(M - \alpha E) = \beta(M - \alpha E)$$

- (3) (2) で与えられた式は, α と β を入れ換えても成り立つ. このことと (2) の結果を用いて M^n を求めよ. ただし n は正の整数とする.

- (4) n 年後に A 町と B 町それぞれに住んでいる住民の数を a_n と b_n とで表す. このとき, つぎの極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

第 2 問

媒介変数 θ_1 および θ_2 で表される 2 つの曲線

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos \theta_1 \\ y = \sin \theta_1 \end{cases} \quad (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2})$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \cos \theta_2 \\ y = 3 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0)$$

がある.

C_1 上の点 P_1 と C_2 上の点 P_2 が,

$$\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$$

の関係を保って移動する.

曲線 C_1 の点 P_1 における接線と, 曲線 C_2 の点 P_2 における接線の交点を P とし, これら 2 つの接線のなす角 $\angle P_1 P P_2$ を α とする. つぎの各問に答えよ.

- (1) 直線 $P_1 P$ と x 軸とのなす角を β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$), 直線 $P_2 P$ と x 軸とのなす角を γ ($0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$) とする. $\tan \beta$ および $\tan \gamma$ を θ_1 で表せ.
- (2) $\tan \alpha$ を θ_1 で表せ.
- (3) $\tan \alpha$ の最大値と, 最大値を与える θ_1 を求めよ.

第 3 問

空間内の点 O, A, B, C の座標をそれぞれ $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ とする. 点 P は x 軸上を点 O から点 A へ向かって, 点 Q は y 軸上を点 B から点 O へ向かって, それぞれ時刻 $t = 0$ に出発して速さ 1 で移動する. 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) において三角形 CPQ を z 軸のまわりに回転させてできる立体を考える. つぎの各問に答えよ.

- (1) 時刻 t において, xy 平面上の線分 PQ を原点を中心にして xy 平面上で 1 回転させたときに線分が通過する部分の面積を求めよ.
- (2) 時刻 t において, 立体を平面 $z = u$ ($0 \leq u \leq 1$) で切ったときの断面積 $S(u)$ を求め, 立体の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (3) $V(t)$ の最小値と, 最小値を与える t を求めよ.

第 4 問

コインを投げた結果に基づき xy 平面上の点 $Q(x, y)$ を動かすものとする．最初，点 Q は原点にあり，コインを投げて表がでれば x 座標を 1 増加させ，裏が出れば y 座標を 1 増加させる．点 Q が直線 $x = a$ あるいは直線 $y = a$ のいずれかの上に達するまでこの試行を繰り返す．つぎの各問に答えよ．ただし， a は正の整数であり，コインの表と裏の出る確率は等しいものとする．

- (1) コインを投げる回数 N の最小値 K と最大値 L を a を用いて表せ．
- (2) $a = 3$ のとき，コインを投げる回数 N が 4 である確率を求めよ．
- (3) 任意の a に対して，コインを投げる回数 N が n ($K \leq n \leq L$) である確率を求めよ．
- (4) (3) で求めた確率を p_n とする． $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ を求めよ．ただし， $K \leq n \leq L - 1$ とする．
- (5) (4) の結果を利用し，コインを投げる回数 N の期待値を a を用いて表せ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)