

名古屋大学 2006 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

A, B 2つの町がある. 毎年 1 月 1 日に, A 町の前年の住民のうち 4 割が B 町に, B 町の前年の住民のうち 2 割が A 町に, それぞれ引越す (住民の数は十分に多く, 引越す住民の割合は正確に 4 割, 2 割と見なしてよい). それ以外には住民の移動はなく, A 町, B 町両方をあわせた住民の数は不変である. 次の各問に答えよ.

- (1) ある年の末に A 町と B 町それぞれに住んでいる住民の数を a_0, b_0 とする. 1 年後に A 町と B 町それぞれに住んでいる住民の数を a_1, b_1 を表す式を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 2×2 の行列 M を具体的に示せ.

- (2) 以下の式を満足する実数 α, β の値を求めよ. ただし E は 2×2 の単位行列である.

$$M(M - \alpha E) = \beta(M - \alpha E)$$

- (3) (2) で与えられた式は, α と β を入れ換えても成り立つ. このことと (2) の結果を用いて M^n を求めよ. ただし n は正の整数とする.

- (4) n 年後に A 町と B 町それぞれに住んでいる住民の数を a_n と b_n とで表す. このとき, つぎの極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

【方針】

まず 1 年後の移動を行列で表し, その行列が満たす二次式を直接計算する. $M^2 - \frac{7}{5}M + \frac{2}{5}E = O$ が分かれば, $M - E$ と $M - \frac{2}{5}E$ を使って E を 2 つの部分に分け, 片方は M をかけても変わらず, もう片方は毎回 $\frac{2}{5}$ 倍される形にできる. 最後の極限では $(\frac{2}{5})^n \rightarrow 0$ を用いる. 全人口が一定であることを使う直接解もあり, 極限の意味を確認する補助になる.

【解答】

- (1) 1 年後, A 町に残るのは A 町の前年住民の 6 割であり, B 町からは 2 割が移ってくる. したがって $a_1 = \frac{3}{5}a_0 + \frac{1}{5}b_0$, $b_1 = \frac{2}{5}a_0 + \frac{4}{5}b_0$ である. よって

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

である.

- (2) 直接計算すると

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{21}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix}$$

である. 一方

$$\frac{7}{5}M - \frac{2}{5}E = \begin{pmatrix} \frac{21}{25} - \frac{10}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{28}{25} - \frac{10}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{21}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix}$$

だから $M^2 - \frac{7}{5}M + \frac{2}{5}E = O$ である. これは $M^2 - M - \frac{2}{5}M + \frac{2}{5}E = O$ すなわち $M(M - E) = \frac{2}{5}(M - E)$ と書ける. したがって $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2}{5}$ である.

- (3) (2) より $M(M - E) = \frac{2}{5}(M - E)$ であり, 問題文の通り 1 と $\frac{2}{5}$ を入れ換えた式も成り立つので $M\left(M - \frac{2}{5}E\right) = M - \frac{2}{5}E$ である. ここで $P = \frac{5}{3}\left(M - \frac{2}{5}E\right)$, $Q = -\frac{5}{3}(M - E)$ とおくと, $P + Q = E$ であり, さらに $MP =$

P , $MQ = \frac{2}{5}Q$ である。したがって $M^n = M^n(P+Q) = P + \left(\frac{2}{5}\right)^n Q$ となる。すなわち

$$M^n = \frac{5}{3} \left(M - \frac{2}{5}E \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n (M - E)$$

である。成分を整理すると

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \end{pmatrix}$$

である。

(4) M^n の式より

$$a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) a_0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) b_0,$$

$$b_n = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) a_0 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) b_0$$

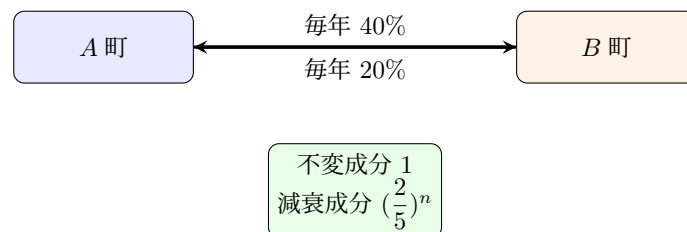
である。 $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow 0$ だから、両町の合計人口 $a_0 + b_0$ を用いて $a_n \rightarrow \frac{a_0 + b_0}{3}$, $b_n \rightarrow \frac{2(a_0 + b_0)}{3}$ となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$$

である。

(4) の検算 (総人口を用いる方法)

極限だけなら、合計人口 $T = a_n + b_n$ が一定であることを使ってもよい。 $b_n = T - a_n$ とおくと $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n = \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{5}T$ である。両辺から $T/3$ を引くと $a_{n+1} - \frac{T}{3} = \frac{2}{5} \left(a_n - \frac{T}{3} \right)$ となるので、 $a_n \rightarrow T/3$, $b_n = T - a_n \rightarrow 2T/3$ が直接分かる。これも上の極限 $\frac{1}{2}$ と一致する。



長期的には流出数が等しくなり、人口比は $A : B = 1 : 2$ に近づく。

【総評】 行列計算の問題だが、本質は「一定になる部分」と「毎年 $\frac{2}{5}$ 倍で消える部分」に分けることにある。目安は 20 分程度。(2) では二次式を暗算で決めようとする係数を誤りやすいので、まず $M(M-E)$ を直接確認するのが安全である。(3) の分解は見慣れない形だが、 $P+Q=E$, $MP=P$, $MQ=\left(\frac{2}{5}\right)Q$ を順に書けば答案として十分伝わる。

【第 2 問】

媒介変数 θ_1 および θ_2 で表される 2 つの曲線

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos \theta_1 \\ y = \sin \theta_1 \end{cases} \quad (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2})$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \cos \theta_2 \\ y = 3 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0)$$

がある。

C_1 上の点 P_1 と C_2 上の点 P_2 が,

$$\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$$

の関係を保って移動する。

曲線 C_1 の点 P_1 における接線と、曲線 C_2 の点 P_2 における接線の交点を P とし、これら 2 つの接線のなす角 $\angle P_1 P P_2$ を α とする。つぎの各問に答えよ。

- (1) 直線 $P_1 P$ と x 軸とのなす角を β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$), 直線 $P_2 P$ と x 軸とのなす角を γ ($0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$) とする。 $\tan \beta$ および $\tan \gamma$ を θ_1 で表せ。
- (2) $\tan \alpha$ を θ_1 で表せ。
- (3) $\tan \alpha$ の最大値と、最大値を与える θ_1 を求めよ。

【方針】

媒介変数を $\theta_1 = \theta$ とおき、 $\theta_2 = \theta - \pi/2$ に直す。接線の傾きは dy/dx で求められるので、 C_1 では負の傾き、 C_2 では正の傾きになる。2 直線のなす角は傾きの公式で処理し、この問題の α は鈍角になるため $\tan \alpha$ が負になる点を明記する。最後は $u = \tan \theta > 0$ とおき、 $1/u + 3u$ の最小値から $\tan \alpha$ の最大値を出す。

【解答】

(1) $\theta_1 = \theta$ とおく。 $0 < \theta < \pi/2$ である。 C_1 では $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{1}{\tan \theta}$ である。直線 $P_1 P$ は負の傾きをもつので、 x 軸とのなす鋭角 β について $\tan \beta = \frac{1}{\tan \theta_1}$ である。

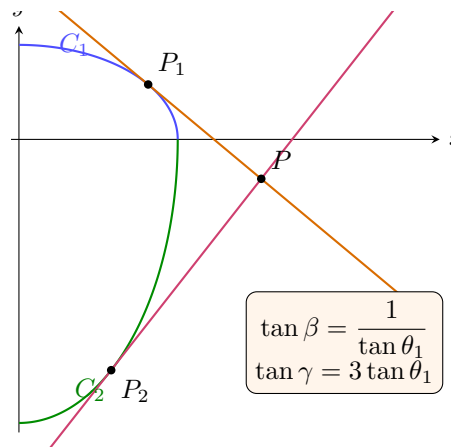
また $\theta_2 = \theta - \frac{\pi}{2}$ である。 C_2 では $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos \theta_2}{-\sin \theta_2}$ 。ここで $\cos \theta_2 = \sin \theta$, $\sin \theta_2 = -\cos \theta$ だから $\frac{dy}{dx} = 3 \tan \theta$ 。したがって $\tan \gamma = 3 \tan \theta_1$ である。

(2) 2 つの接線の傾きを $m_1 = -\frac{1}{\tan \theta}$, $m_2 = 3 \tan \theta$ とする。 $m_1 m_2 = -3$ であり、2 本の直線の交わり方から $\angle P_1 P P_2 = \alpha$ は鈍角である。傾き m_1, m_2 の 2 直線のなす角の公式より

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}}{1 - 3}.$$

よって $\tan \alpha = -\frac{1 + 3 \tan^2 \theta_1}{2 \tan \theta_1}$ である。

(3) $u = \tan \theta_1$ とおくと $u > 0$ であり、 $\tan \alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + 3u \right)$ である。相加相乗平均より $\frac{1}{u} + 3u \geq 2\sqrt{3}$ であり、等号は $1/u = 3u$, すなわち $u = 1/\sqrt{3}$ のとき成り立つ。したがって負号が付いていることに注意すると、 $\tan \alpha$ はこのとき最大になり、 $\max \tan \alpha = -\sqrt{3}$ である。また $\tan \theta_1 = 1/\sqrt{3}$, $0 < \theta_1 < \pi/2$ より $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ である。



【総評】 接線の傾きを出すだけなら標準的だが、 C_1 の接線は負の傾き、 C_2 の接線は正の傾きになるため、角の扱いで符号ミスが出やすい。目安は 15 分程度。(2) で α が鈍角であることを書けば、 $\tan \alpha$ が負になる理由が明確になる。(3) は $u = \tan \theta_1$ と置いた後、最大値が「負の式の最大」であることに注意する。

【第 3 問】

空間内の点 O, A, B, C の座標をそれぞれ $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ とする。点 P は x 軸上を点 O から点 A へ向かって、点 Q は y 軸上を点 B から点 O へ向かって、それぞれ時刻 $t = 0$ に出発して速さ 1 で移動する。時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) において三角形 CPQ を z 軸のまわりに回転させてできる立体を考える。つぎの各問に答えよ。

- (1) 時刻 t において、 xy 平面上の線分 PQ を原点を中心にして xy 平面上で 1 回転させたときに線分が通過する部分の面積を求めよ。
- (2) 時刻 t において、立体を平面 $z = u$ ($0 \leq u \leq 1$) で切ったときの断面積 $S(u)$ を求め、立体の体積 $V(t)$ を求めよ。
- (3) $V(t)$ の最小値と、最小値を与える t を求めよ。

【方針】

時刻 t では $P = (t, 0, 0), Q = (0, 1-t, 0)$ である。線分 PQ を xy 平面で回すと、原点から線分までの距離を内半径、端点のうち遠い方までの距離を外半径とする円環になる。断面 $z = u$ では三角形 CPQ が頂点 C から相似比 $1-u$ で縮むので、断面積は (1) の面積に $(1-u)^2$ を掛ければよい。最後は対称性と微分で最小を確認する。

【解答】

(1) 時刻 t において $P = (t, 0, 0), Q = (0, 1-t, 0)$ である。 xy 平面上の直線 PQ は $\frac{x}{t} + \frac{y}{1-t} = 1$ と書けるので、原点からこの直線までの距離は

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(1-t)^2}}} = \frac{t(1-t)}{\sqrt{t^2 + (1-t)^2}}$$

である。線分 PQ を原点のまわりに 1 回転させると、内半径 d 、外半径 $\max\{t, 1-t\}$ の円環ができる。 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき外半径は $1-t$ であるから、面積は

$$\pi \left\{ (1-t)^2 - \frac{t^2(1-t)^2}{t^2 + (1-t)^2} \right\} = \pi \frac{(1-t)^4}{t^2 + (1-t)^2}.$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき外半径は t であるから、面積は

$$\pi \left\{ t^2 - \frac{t^2(1-t)^2}{t^2 + (1-t)^2} \right\} = \pi \frac{t^4}{t^2 + (1-t)^2}.$$

したがって求める面積は

$$\begin{cases} \pi \frac{(1-t)^4}{t^2 + (1-t)^2} & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2} \right), \\ \pi \frac{t^4}{t^2 + (1-t)^2} & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \right). \end{cases}$$

(2) 平面 $z = u$ による断面を考える。三角形 CPQ のうち高さ $z = u$ にある線分は、 xy 平面上の線分 PQ を相似比 $1 - u$ で縮小したものである。回転後の面積は長さの 2 乗に比例するので、(1) の面積を $(1 - u)^2$ 倍すればよい。よって

$$S(u) = \begin{cases} \pi(1-u)^2 \frac{(1-t)^4}{t^2 + (1-t)^2} & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \pi(1-u)^2 \frac{t^4}{t^2 + (1-t)^2} & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right). \end{cases}$$

体積はこれを $0 \leq u \leq 1$ で積分して

$$V(t) = \int_0^1 S(u) du$$

である。

$$\int_0^1 (1-u)^2 du = \frac{1}{3}$$

だから

$$V(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \frac{(1-t)^4}{t^2 + (1-t)^2} & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \frac{\pi}{3} \frac{t^4}{t^2 + (1-t)^2} & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right). \end{cases}$$

(3) $V(t)$ は t と $1 - t$ を入れ換えても同じなので、 $t = \frac{1}{2}$ に関して対称である。したがって $0 \leq t \leq 1/2$ で単調減少を確認すればよい。 $f(t) = \frac{(1-t)^4}{t^2 + (1-t)^2}$ とおく。対数微分で符号だけを見ると

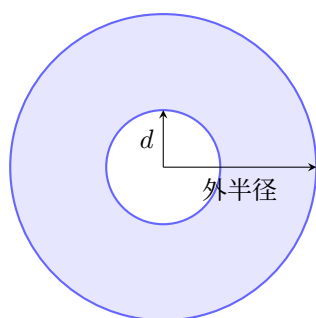
$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{4}{1-t} - \frac{4t-2}{t^2 + (1-t)^2} = \frac{-2(2t^2 - t + 1)}{(1-t)\{t^2 + (1-t)^2\}} < 0$$

である。よって $f(t)$ は $0 \leq t \leq 1/2$ で減少する。対称性より、 $V(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最小になる。

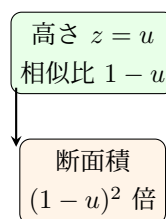
このとき

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{24}.$$

したがって $t = \frac{1}{2}$, $V_{\min} = \frac{\pi}{24}$ である。



線分 PQ が掃く円環



【総評】 回転体の体積だが、いきなり立体を考えるより、まず xy 平面で線分が掃く円環を作るのが見通しやすい。目安は 25 分程度。内半径は線分と原点の距離であって、端点までの短い方の距離ではない点に注意する。(2) は断面が相似比 $1 - u$ で縮むことを明記すれば、体積計算は

$$\int_0^1 (1-u)^2 du = \frac{1}{3}$$

で終わる。(3) では対称性だけで最小を断定せず、片側での単調性を一度確認するのが答案として堅い。

【第 4 問】

コインを投げた結果に基づき xy 平面上の点 $Q(x, y)$ を動かすものとする. 最初, 点 Q は原点にあり, コインを投げて表がでれば x 座標を 1 増加させ, 裏が出れば y 座標を 1 増加させる. 点 Q が直線 $x = a$ あるいは直線 $y = a$ のいずれかの上に達するまでこの試行を繰り返す. つぎの各問に答えよ. ただし, a は正の整数であり, コインの表と裏の出る確率は等しいものとする.

- (1) コインを投げる回数 N の最小値 K と最大値 L を a を用いて表せ.
- (2) $a = 3$ のとき, コインを投げる回数 N が 4 である確率を求めよ.
- (3) 任意の a に対して, コインを投げる回数 N が n ($K \leq n \leq L$) である確率を求めよ.
- (4) (3) で求めた確率を p_n とする. $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ を求めよ. ただし, $K \leq n \leq L - 1$ とする.
- (5) (4) の結果を利用し, コインを投げる回数 N の期待値を a を用いて表せ.

【方針】

停止するのは, 表の回数または裏の回数が初めて a に達した瞬間である. 最小回数は同じ面が続く場合, 最大回数は両方が $a - 1$ 回ずつに近づいてから最後に一方が a に達する場合で決まる. $N = n$ では最後の 1 回で一方が a 回目になり, その直前にはその面が $a - 1$ 回, 他方が $n - a$ 回出ている. 期待値では $n_{n-1}C_{a-1} = a_nC_a$ を使い, 残る和を「 $a + 1$ 回目の表がいつ出るか」の数え上げで評価する.

【解答】

(1) 表または裏のどちらかが a 回出た時点で止まる. 同じ面が a 回続けば a 回で止まるので $K = a$ である. 一方, $2a - 2$ 回までは表が $a - 1$ 回, 裏が $a - 1$ 回という状態がありうる. しかし $2a - 1$ 回投げると, 表と裏の回数の和が $2a - 1$ なので, 少なくとも一方は a 回以上になる. したがって $L = 2a - 1$ である.

(2) $a = 3$ で $N = 4$ となるには, 4 回目で表または裏が 3 回目になればよい. 最後が表の場合, 初めの 3 回のうち表が 2 回, 裏が 1 回であり, その並び方は ${}_3C_2 = 3$ 通りである. 最後が裏の場合も同じく 3 通りである. 全事象は 2^4 通りだから $\frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$ である.

(3) $a \leq n \leq 2a - 1$ とする. $N = n$ となるには, 最後の 1 回で一方の座標が a に達し, 他方の座標は $n - a$ で止まっている必要がある. 最後が表の場合, 初めの $n - 1$ 回のうち表が $a - 1$ 回, 裏が $n - a$ 回であればよい. この並び方は ${}_{n-1}C_{a-1}$ 通りである. 最後が裏の場合も同数で, 両者は重ならない. したがって $p_n = P(N = n) = \frac{{}_{2n-1}C_{a-1}}{2^n}$ である.

(4) (3) の式から

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{{}_{2n}C_{a-1}}{2^{n+1}}}{\frac{{}_{2n-1}C_{a-1}}{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_{n}C_{a-1}}{{}_{n-1}C_{a-1}}.$$

ここで

$$\frac{{}_{n}C_{a-1}}{{}_{n-1}C_{a-1}} = \frac{n}{n - a + 1}$$

なので $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n}{2(n - a + 1)}$ である.

(5) 期待値は

$$E(N) = \sum_{n=a}^{2a-1} np_n = \sum_{n=a}^{2a-1} n \frac{{}_{2n-1}C_{a-1}}{2^n}$$

である. ここで ${}_{n-1}C_{a-1} = a_nC_a$ を用いると

$$E(N) = 2a \sum_{n=a}^{2a-1} \frac{{}_{n}C_a}{2^n}$$

となる.

この和を評価する. $2a$ 回のコイン投げを考え, $(a + 1)$ 回目の表がちょうど $n + 1$ 回目に出る事象を考える. これは, 初めの n 回に表がちょうど a 回あり, $(n + 1)$ 回目表であることと同じなので, その確率は $\frac{{}_{n}C_a}{2^{n+1}}$ である. $n = a, a + 1, \dots, 2a - 1$ について足すと, $2a$ 回のうち表が少なくとも $a + 1$ 回出る確率になる. 対称性より

$$P(\text{表が少なくとも } a + 1 \text{ 回}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{{}_{2a}C_a}{2^{2a}} \right)$$

である。したがって

$$\sum_{n=a}^{2a-1} \frac{n C_a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2a C_a}{2^{2a}} \right)$$

であり、両辺を 2 倍して

$$\sum_{n=a}^{2a-1} \frac{n C_a}{2^n} = 1 - \frac{2a C_a}{2^{2a}}$$

を得る。よって $E(N) = 2a \left(1 - \frac{2a C_a}{2^{2a}} \right)$ である。

(5) の検算 (停止前の状態を数える方法)

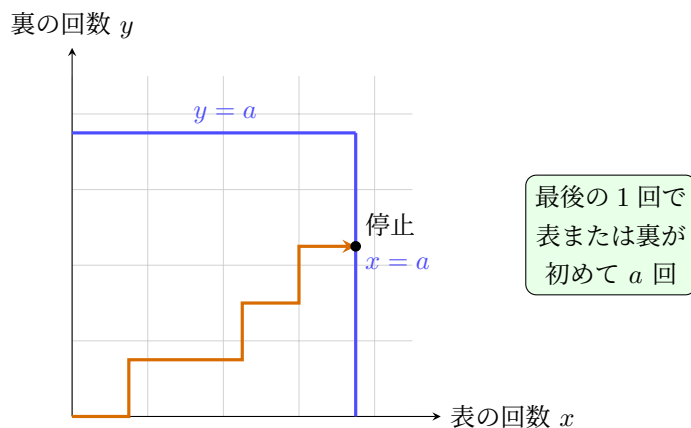
期待値は

$$E(N) = \sum_{m=0}^{2a-2} P(N > m)$$

としても求められる。 $m < a$ では必ず $N > m$ であり、 $a \leq m \leq 2a-2$ では、 m 回後の表の回数を h とすると、まだ止まっていない条件は $m-a+1 \leq h \leq a-1$ である。したがって

$$E(N) = a + \sum_{m=a}^{2a-2} \sum_{h=m-a+1}^{a-1} \frac{m C_h}{2^m}$$

とも表せる。この二重和をパスカルの関係で外側から畳むと上と同じ $2a(1 - 2a C_a / 2^{2a})$ に戻り、停止前の状態を数える見方でも同じ結果が得られる。



図は $a = 5$ の一例。停止時刻は $a \leq N \leq 2a-1$ に限られる。

【総評】 最後の 1 回で初めて a 回目に到達する、という停止時刻の読み替えが中心である。目安は 25 分程度。(3) で最後が表の場合と裏の場合を分け、直前の $n-1$ 回に何が何回出ているかを明記すれば、確率式は自然に出る。(5) は和の評価が山場で、単に「整理すると」とせず、 $(a+1)$ 回目の表が出る時刻を数える説明を入れると答案の説得力が高い。