

名古屋大学 2006 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上に曲線 $C: y = \log x (x > 0)$ を考える.

- (1) 曲線 C の接線で点 $(0, b)$ を通るものの方程式を求めよ.
- (2) 平面上に 2 組の点列 $\{A_n\}, \{B_n\}$ を次のように定める. A_1 を $(1, 0)$ とする. A_n が定まったとき, A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし, B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする. このとき, 2 つの線分 $A_n B_n$ と $B_n A_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ.
- (3) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$$

の和を求めよ. ここで, $|r| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

であることを用いてよい.

【方針】

接線を接点 $x = a$ で表し, 指定点 $(0, b)$ を通る条件から a を決める. (2) では B_n の高さが $\log x_n$ なので, (1) の結果をそのまま使って $x_{n+1} = ex_n$ を得る. 面積 S_n は, 水平線, 接線, 曲線 $y = \log x$ に囲まれる部分を $0 \leq x \leq e^{n-1}$ と $e^{n-1} \leq x \leq e^n$ に分けて積分する. 最後は等比級数を微分して得られる和

$$\sum nr^{n-1} = 1/(1-r)^2$$

を用いる.

【解答】

(1)

曲線 $C: y = \log x$ 上の接点を $(a, \log a)$ とする. $y' = 1/x$ だから, この点における接線は

$$y = \frac{1}{a}(x - a) + \log a = \frac{x}{a} + \log a - 1$$

である. この直線が点 $(0, b)$ を通るための条件は

$$b = \log a - 1$$

である. したがって $a = e^{b+1}$ であり, 求める接線は

$$y = e^{-b-1}x + b$$

である.

(2)

$A_n = (x_n, \log x_n)$ とおくと $B_n = (0, \log x_n)$ である. (1) で $b = \log x_n$ とすれば, 次の接点の x 座標は

$$x_{n+1} = e^{\log x_n + 1} = ex_n$$

となる. $x_1 = 1$ より

$$x_n = e^{n-1}$$

である. また, B_n を通る接線は

$$y = e^{-n}x + n - 1$$

である.

$A_n = (e^{n-1}, n-1)$, $A_{n+1} = (e^n, n)$ である. 求める領域は, $0 \leq x \leq e^{n-1}$ では接線と水平線 $y = n-1$ の間, $e^{n-1} \leq x \leq e^n$ では接線と曲線 $y = \log x$ の間である. よって

$$S_n = \int_0^{e^{n-1}} e^{-n} x dx + \int_{e^{n-1}}^{e^n} \{e^{-n} x + n - 1 - \log x\} dx.$$

第 1 項は

$$\frac{1}{2}e^{n-2}$$

である. 第 2 項の原始関数は

$$\frac{1}{2}e^{-n}x^2 + (n-1)x - x \log x + x$$

であり, 上端で $\frac{1}{2}e^n$, 下端で $\frac{1}{2}e^{n-2} + e^{n-1}$ となる. したがって

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}e^{n-2} + \left(\frac{1}{2}e^n - \frac{1}{2}e^{n-2} - e^{n-1} \right) \\ &= \frac{e-2}{2}e^{n-1}. \end{aligned}$$

(3)

(2) より

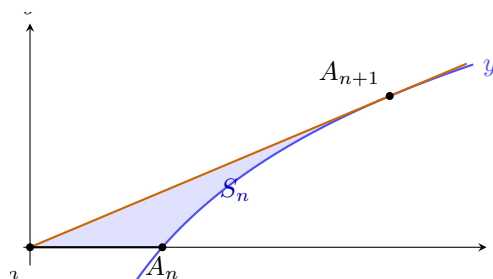
$$\frac{n}{S_n} = \frac{2n}{(e-2)e^{n-1}}$$

である. $|r| < 1$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

であるから, $r = 1/e$ として

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n} &= \frac{2}{e-2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{e} \right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{e-2} \cdot \frac{1}{(1-1/e)^2} \\ &= \frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2}. \end{aligned}$$



図は $n = 1$ の相似形. 水平線・接線・曲線の順を確認して積分を分ける.

【総評】 接線の接点を未知数にしてから, 点 $(0, b)$ を通すという一本道の問題である. 目安は 20 分程度. (3) では面積を 1 本の積分に無理にまとめず, A_n の左側と右側で下端・上端を確認して分けるとミスが減る. 最後の級数は S_n が等比的に増えることを見抜けば短く, 面積計算で定数 $(e-2)/2$ を落とさないことが得点の分かれ目になる.

【第 2 問】

s を実数とする. $(u_1, v_1) = (s, 1)$ とし, (u_n, v_n) ($n \geq 2$) を次の漸化式で定める.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

s が実数全体を動くとき, (u_n, v_n) が描く xy 平面上の図形を l_n とする.

(1) 図形 l_n ($n \geq 1$) の方程式を求めよ.

(2) l_{2k-1} (k は正の整数) と y 軸との交点を中心とし, l_{2k} に接する円の方程式を求めよ.

【方針】

行列を 2 回かけると $M^2 = -3E$ になることをまず確認する. これにより奇数番目と偶数番目の点を明確に分けて表せるので, s を消去して直線 l_n の方程式を得る. 円は, 中心が奇数番目の直線と y 軸の交点にあり, 偶数番目の直線に接するので, 点と直線の距離公式から半径を出す.

【解答】

(1)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3E$$

である. したがって, $k \geq 1$ に対して $M^{2k-2} = (-3)^{k-1}E$, $M^{2k-1} = (-3)^{k-1}M$ となる.

まず P_{2k-1} は

$$P_{2k-1} = M^{2k-2} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)^{k-1} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. よって s が動くとき $y = (-3)^{k-1}$ 上を動くから $l_{2k-1}: y = (-3)^{k-1}$ である.

次に

$$P_{2k} = M^{2k-1} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)^{k-1} \begin{pmatrix} s-2 \\ 2s-1 \end{pmatrix}$$

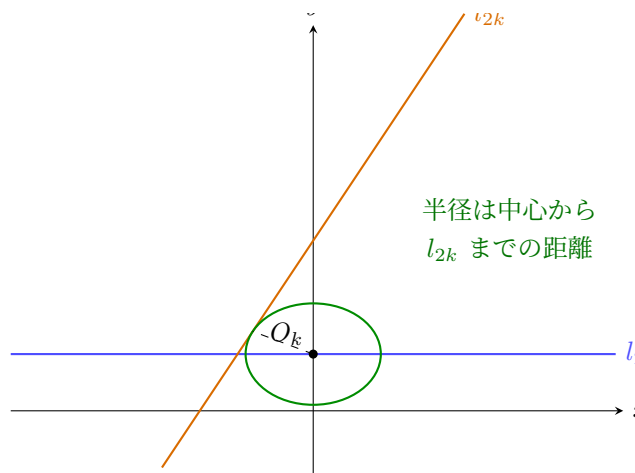
である. 点の座標を (x, y) とすると $x = (-3)^{k-1}(s-2)$, $y = (-3)^{k-1}(2s-1)$ である. $A = (-3)^{k-1}$ とおけば, $x = A(s-2)$ から $s = x/A + 2$ であり, $y = A\left(2\frac{x}{A} + 4 - 1\right) = 2x + 3A$. したがって $l_{2k}: y = 2x + 3(-3)^{k-1}$ である.

(2)

円 C_k の中心は, l_{2k-1} と y 軸の交点なので $O_k = (0, (-3)^{k-1})$ である. l_{2k} を $2x - y + 3(-3)^{k-1} = 0$ と書く. 点 O_k からこの直線までの距離が半径 r_k であるから

$$r_k = \frac{|2 \cdot 0 - (-3)^{k-1} + 3(-3)^{k-1}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{\sqrt{5}}.$$

よって $r_k^2 = \frac{4 \cdot 9^{k-1}}{5}$ である. したがって円 C_k の方程式は $x^2 + \{y - (-3)^{k-1}\}^2 = \frac{4 \cdot 9^{k-1}}{5}$ である.



図は $k = 1$ の配置. 一般の k でも平行移動・拡大された同じ形になる.

【総評】 最初の $M^2 = -3E$ に気づけるかで計算量が大きく変わる。目安は 18 分程度で、奇数番目・偶数番目を同じ式で処理しようとせず、 $2k-1, 2k$ に分けるのがよい。円の半径は接点を求める必要はなく、中心から直線までの距離で十分である。符号 $(-3)^{k-1}$ と長さ 3^{k-1} を混同しないことが最後の注意点である。

【第 3 問】

座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 0)$ を考える. 平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき, 直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする.

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし, l に関して A と対称な点を $A'(t, 0)$ ($0 \leq t \leq 6$) とするとき, p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ. 図には三角形 OAB も書いておくこと.
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ.

【方針】

文系の反射問題と同じく, ピッタリ直線を線分 AA' の垂直二等分線として扱う. ただし今回は反射先 $A' = (t, 0)$ が $0 \leq t \leq 6$ に制限されるので, 二次方程式の 2 つの実根がともにこの区間に入る条件を丁寧に書く. 2 根が区間内にある条件は, 軸の位置, 端点での符号, 判別式の正負で表し, 直交条件は根と係数の関係で処理する.

【解答】

(1)

$A = (4, 2)$ が直線 l に関して x 軸上の点 $A' = (t, 0)$ に移るとする. 条件より $0 \leq t \leq 6$ である. l は線分 AA' の垂直二等分線だから, (p, q) が l 上にあることは $(p-4)^2 + (q-2)^2 = (p-t)^2 + q^2$ と同値である. 整理すると $t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20 = 0$ となる. これが (1) の答である.

(2)

$f(t) = t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20$ とおく. (p, q) を通る異なる 2 本のピッタリ直線が存在するためには, この二次方程式が $[0, 6]$ に異なる 2 つの実根をもてばよい. 上に開く放物線なので, その条件は $0 \leq p \leq 6$, $f(0) \geq 0$, $f(6) \geq 0$, 判別式 > 0 である. 実際, 軸 $t = p$ が区間内にあり, 両端で 0 以上, かつ最小値が 0 より小さければ, 2 つの交点は区間内に入る.

各条件を計算すると $f(0) = 8p + 4q - 20 \geq 0 \iff q \geq 5 - 2p$, $f(6) = 36 - 12p + 8p + 4q - 20 \geq 0 \iff q \geq p - 4$, また判別式より $(-2p)^2 - 4(8p + 4q - 20) > 0$ すなわち $q < \frac{(p-4)^2}{4} + 1$ である. したがって求める領域は

$$0 \leq p \leq 6, \quad q \geq 5 - 2p, \quad q \geq p - 4, \quad q < \frac{(p-4)^2}{4} + 1$$

である.

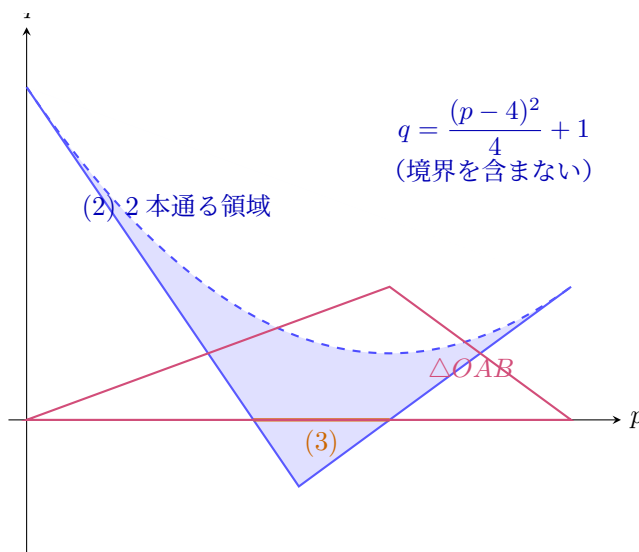
(3)

2つの根を t_1, t_2 とする。根 t_i に対応するピタリ直線は、垂直二等分線の式を整理すると

$$y = \frac{t_i - 4}{2}x + \frac{20 - t_i^2}{4}$$

となる。したがって、 $t_i = 4$ の場合も含め、その傾きは $\frac{t_i - 4}{2}$ である。2本のピタリ直線が直交するためには $\frac{t_1 - 4}{2} \cdot \frac{t_2 - 4}{2} = -1$ すなわち $(t_1 - 4)(t_2 - 4) = -4$ であればよい。根と係数の関係から $t_1 + t_2 = 2p$, $t_1 t_2 = 8p + 4q - 20$ であるから $(t_1 - 4)(t_2 - 4) = t_1 t_2 - 4(t_1 + t_2) + 16 = 4q - 4$. よって $4q - 4 = -4$ となり、 $q = 0$ である。

あとは (2) の領域に $q = 0$ を代入する。条件は $0 \geq 5 - 2p$, $0 \geq p - 4$, $0 < \frac{(p - 4)^2}{4} + 1$ であり、最後の不等式は常に成り立つ。したがって $\frac{5}{2} \leq p \leq 4$ である。よって求める点 (p, q) の集合は $\frac{5}{2} \leq p \leq 4$, $q = 0$ である。端点でも2根はそれぞれ $(0, 5)$, $(2, 6)$ のように異なる2点になるので、端点を含めてよい。



【総評】 反射の基本方針は単純だが、この問題では $0 \leq t \leq 6$ の制限が本体である。目安は20分程度。判別式だけで領域を決めると区間外の反射先まで含めてしまうため、端点 $t = 0, 6$ の符号と軸の位置を必ず書くこと。(3) は直交条件から $q = 0$ が出たあと、(2) の条件に戻って p の範囲を絞るところまでが答案である。

【第4問】

正六面体の各面に1つずつ、サイコロのように、1から6までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は7である。このような正六面体が底面の数字が1であるように机の上におかれている。この状態から始めて、次の試行を繰り返す。「現在の底面と隣り合う4面のうちの1つを新しい底面にする。」ただし、これらの4面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後、底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ ($n \geq 1$) で表す。

- (1) $n \geq 1$ のとき、 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$, $r_n = p_n(2) + p_n(5)$, $s_n = p_n(3) + p_n(4)$ を求めよ。
- (2) $p_n(m)$ ($n \geq 1, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) を求めよ。

【方針】

向かい合う面の3組 $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ に分けると、各組の番号の和がすべて7であるため、組どうしの移動確率が簡単になる。まず各組にいる確率を求め、その後で組内の番号比に比例して各面の確率へ戻す。特定の面だけを追うのではなく、3組の確率 q_n, r_n, s_n を並べると全体が見通しやすい。

【解答】

準備

向かい合う面の組を

$$A = \{1, 6\}, \quad B = \{2, 5\}, \quad C = \{3, 4\}$$

とする。各組の番号和は7である。底面がある組に属するとき、次の底面は他の2組のどちらかに入り、その確率はそれぞれ

れ $\frac{1}{2}$ である.

(1)

q_n, r_n, s_n を, n 回目の操作後に底面がそれぞれ A, B, C に属する確率とする. 初めは面 1 が底面なので

$$q_0 = 1, \quad r_0 = s_0 = 0$$

である. 組間の移動から

$$q_n = \frac{r_{n-1} + s_{n-1}}{2} = \frac{1 - q_{n-1}}{2}$$

となる. よって

$$q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

である. また初期状態と規則は B, C について対称なので $r_n = s_n$ である. $q_n + r_n + s_n = 1$ から

$$r_n = s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

を得る.

(2)

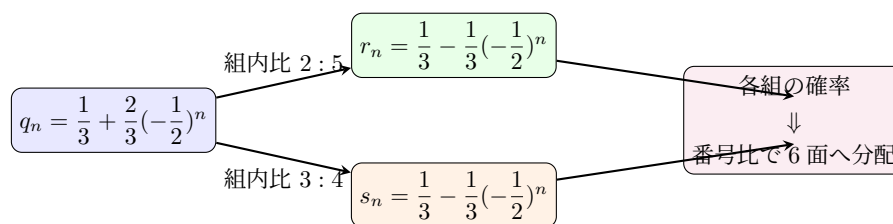
各組へ入るとき, 組内の 2 面が選ばれる確率は番号の比になる. したがって

$$\begin{aligned} p_n(1) &= \frac{1}{7} q_n, & p_n(6) &= \frac{6}{7} q_n, \\ p_n(2) &= \frac{2}{7} r_n, & p_n(5) &= \frac{5}{7} r_n, \\ p_n(3) &= \frac{3}{7} s_n, & p_n(4) &= \frac{4}{7} s_n. \end{aligned}$$

ゆえに $n \geq 1$ について

$$\begin{aligned} p_n(1) &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & p_n(6) &= \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \\ p_n(2) &= \frac{2}{21} - \frac{2}{21} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & p_n(5) &= \frac{5}{21} - \frac{5}{21} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \\ p_n(3) &= \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & p_n(4) &= \frac{4}{21} - \frac{4}{21} \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

$n = 1$ では面 1 と面 6 の確率が 0 となり, 初回には現在の面とその向かい側の面へ移れないことも一致する.



【総評】 組の確率を先に出し, 最後に組内の比で各面へ戻すと計算が短い. 目安は 20 分程度. 6 面を直接追うと式が増えるが, 向かい合う組の番号和がすべて 7 であることを使えば, 組間の移動は「別の 2 組へ半分ずつ」に整理できる. 最後の各面の確率では, 組内を等確率にしないこと, 特に $\frac{1}{7}, \frac{6}{7}$ の比を忘れないことが重要である.