

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2007 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

2 行 2 列の行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える. a, b, d が実数で $c = 0$ である行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

を上三角行列という. また,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

- (1) $A^2 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ.
- (2) $A^3 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ.
- (3) 上三角行列 A が $A^4 = E$ をみたすとき, $A^2 = E$ となることを示せ.

第 2 問

- (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ.
- (2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつとする. $l = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ.
- (3) a が (2) の条件のもとで変化するとき, l の動く範囲を求めよ.

第 3 問

数列 $\{a_n\}$ ($a_n > 0$) を次の規則によって定める：

$$a_1 = 1, \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

曲線

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

と、 x 軸および 2 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n$$

を求めよ。

第 4 (a) 問

原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円に，円外の点 $P(x_0, y_0)$ から 2 本の接線を引く．

- (1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 (x_1, y_1) を点 P の座標 (x_0, y_0) を用いて表せ．また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ．
- (2) 点 P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

第 4 (b) 問

袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする．

- (1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ．
- (2) 一般の N に対し $p_N(m)$ ($1 \leq m \leq N+1$) を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)