

名古屋大学 2007 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2 行 2 列の行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える. a, b, d が実数で $c = 0$ である行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

を上三角行列という. また,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $A^2 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ.(2) $A^3 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ.(3) 上三角行列 A が $A^4 = E$ をみたすとき, $A^2 = E$ となることを示せ.

▶ 解法 1 (成分計算)

【方針】

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とおき, まず対角成分から実数 a, d の候補を絞る. 右上成分は A^2 で $b(a+d)$, A^3 で $b(a^2 + ad + d^2)$ となる. (3) では $A^4 = E$ から $a, d = \pm 1$ を得て, 同符号・異符号に分ければ $A^2 = E$ が従う.

【解答】

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

とおく.

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}.$$

したがって $A^2 = E$ の条件は

$$a^2 = d^2 = 1, \quad b(a+d) = 0.$$

 $a = d = 1$ または $a = d = -1$ では $b = 0$ である. a, d が異符号なら $a + d = 0$ なので b は任意でよい. よって

$$A = E, \quad -E, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. ただし後ろ 2 個の b は任意の実数である.

(2)

 $A^3 = E$ の対角成分から

$$a^3 = d^3 = 1.$$

 a, d は実数だから $a = d = 1$ である. このとき

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって $3b = 0$, すなわち $b = 0$ である. よって

$$A = E$$

だけである。

(3)

$A^4 = E$ の対角成分から $a^4 = d^4 = 1$ であり、実数条件より

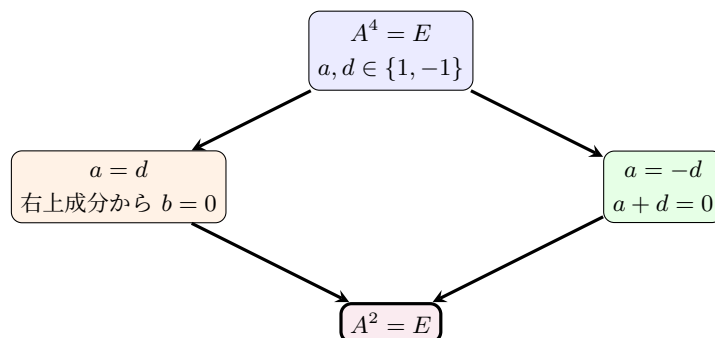
$$a, d \in \{1, -1\}.$$

$a = d = 1$ では A^4 の右上成分は $4b$, $a = d = -1$ では $-4b$ である。したがっていずれも $b = 0$ となり, $A = \pm E$ なので $A^2 = E$ である。

a, d が異符号なら $a + d = 0$ であるから

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = E.$$

以上より, $A^4 = E$ ならば必ず $A^2 = E$ である。



▶ 解法 2 (行列多項式の因数分解)

【方針】

(1) は A^2 を直接計算する。(2) では $A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E)$, (3) では $A^4 - E = (A^2 - E)(A^2 + E)$ と因数分解する。後ろの因子は上三角行列で対角成分が正になるため逆行列をもち, 零積から前の因子が零行列と分かる。

【解答】

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

より, 条件は $a^2 = d^2 = 1$, $b(a+d) = 0$ である。したがって

$$A = E, \quad -E, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ただし後ろ 2 個では b は任意の実数である。

(2)

$$A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E) = O.$$

$A^2 + A + E$ は上三角行列で, その対角成分は

$$a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

$$d^2 + d + 1 = \left(d + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

したがって $A^2 + A + E$ は逆行列をもつ。右からその逆行列を掛けると

$$A - E = O,$$

ゆえに $A = E$ である。

(3)

$$A^4 - E = (A^2 - E)(A^2 + E) = O.$$

$A^2 + E$ は上三角行列で、対角成分は $a^2 + 1 > 0$, $d^2 + 1 > 0$ である。よって $A^2 + E$ は逆行列をもつから

$$A^2 - E = O.$$

したがって $A^2 = E$ である。

【総評】 難度 6, 計算量 5。解法 1 は上三角行列の対角成分から候補を絞る確実な方法で、解法 2 は行列多項式の因数分解と可逆性を用いる短い方法である。(1) では異符号のとき右上成分 b が任意になることを落とさず、(2) では実数の 3 乗根として 1 だけが残ることを確認する。解法 2 で零積から直ちに一方が零とするのは一般には誤りで、後ろの因子が逆行列をもつことの説明が必須である。旧課程数学 C の範囲で完結する。18 分程度が目安である。

【第 2 問】

- (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。
- (2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつとする。 $l = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ。
- (3) a が (2) の条件のもとで変化するとき、 l の動く範囲を求めよ。

【方針】

(1) は導関数から増減・極値を決め、因数分解で x 軸との交点を補う。(2) では 3 解の和と 2 解積の和を使い、 $s = \alpha + \gamma$ を β で表す。 $(\gamma - \alpha)^2 = (\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma$ に代入すれば l が得られる。(3) は中央の解が $0 < \beta < 1$ をちょうど動くことを単調性から示し、平方完成して範囲を求める。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 6x(x - 1).$$

したがって f は $(-\infty, 0)$ で増加, $(0, 1)$ で減少, $(1, \infty)$ で増加する。また

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

だから, $(0, 1)$ で極大, $(1, 0)$ で極小となる。さらに

$$f(x) = (x - 1)^2(2x + 1)$$

より, x 軸とは $(-1/2, 0)$ で交わり, $(1, 0)$ で接する。以上から下図のグラフを得る。

(2)

(1) より, 相異なる 3 つの実数解をもつ条件は

$$0 < a < 1$$

である。方程式は

$$2x^3 - 3x^2 + 1 - a = 0$$

だから, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0.$$

$$s = \alpha + \gamma = \frac{3}{2} - \beta$$

とおくと, 第 2 式から

$$\alpha\gamma = -\beta(\alpha + \gamma) = -\beta s.$$

したがって

$$\begin{aligned}
 l^2 &= (\gamma - \alpha)^2 \\
 &= (\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma \\
 &= s^2 + 4\beta s \\
 &= \left(\frac{3}{2} - \beta\right) \left(\frac{3}{2} + 3\beta\right) \\
 &= -3\beta^2 + 3\beta + \frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$

$l > 0$ であるから

$$l = \sqrt{-3\beta^2 + 3\beta + \frac{9}{4}}.$$

(3)

$0 < a < 1$ のとき, 減少区間 $(0, 1)$ にある中央の解 β は

$$0 < \beta < 1$$

をちょうど動く。(2) の式を平方完成すると

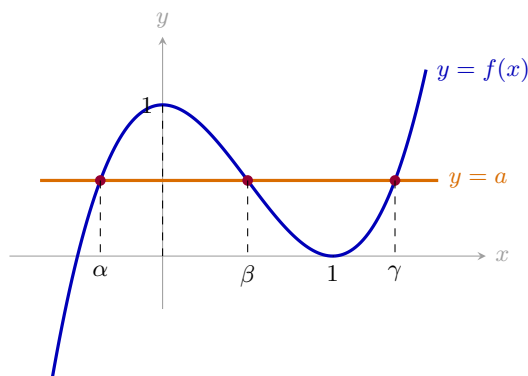
$$l^2 = 3 - 3\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$0 < \beta < 1$ より

$$\frac{9}{4} < l^2 \leq 3.$$

等号 $l^2 = 3$ は $\beta = 1/2$ で実現し, 下端は $\beta = 0, 1$ を含まないため実現しない。よって

$$\frac{3}{2} < l \leq \sqrt{3}.$$



$0 < a < 1$ では水平線が 3 点で交わり, 中央の交点は $0 < \beta < 1$ を動く。

【総評】 難度 6, 計算量 5。グラフ, 3 次方程式の解と係数の関係, 二次式の範囲を一続きに使う問題である。 $l = \gamma - \alpha$ を直接解こうとせず, 和 $\alpha + \gamma$ と積 $\alpha\gamma$ から l^2 を作るのが最短である。3 実数解の条件 $0 < a < 1$ と, 中央の解が $0 < \beta < 1$ をちょうど動く理由をグラフの単調性で説明する。下端 $3/2$ は極値ではなく極限值なので含まれず, 上端 $\sqrt{3}$ は含まれる。18 分から 20 分が目安である。

【第 3 問】

数列 $\{a_n\}$ ($a_n > 0$) を次の規則によって定める：

$$a_1 = 1, \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

曲線

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

と、 x 軸および 2 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。
このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n$$

を求めよ。

【方針】

定義の積分を計算すると $a_n^{2/3}$ が等差数列になる。まず a_n を明示し、次に円板法で半径の平方を積分して V_n を求める。
 $a_n^{1/3}$ は平方根で表されるため、隣り合う平方根の差を有理化してから $\sqrt{n}$ を掛けた極限を取る。定義の積分では $x^{-1/3}$ 、体積では $x^{-2/3}$ となる違いに注意する。

【解答】

定義より

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-1/3} dx \\ &= \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} (a_{n+1}^{2/3} - a_n^{2/3}). \end{aligned}$$

したがって

$$a_{n+1}^{2/3} - a_n^{2/3} = \frac{2}{3}.$$

$a_1^{2/3} = 1$ であるから、 $\{a_n^{2/3}\}$ は初項 1、公差 $2/3$ の等差数列である。よって

$$a_n^{2/3} = 1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2n+1}{3}.$$

$a_n > 0$ より

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{3} \right)^{3/2}, \quad a_n^{1/3} = \sqrt{\frac{2n+1}{3}}.$$

円板法により

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} y^2 dx \\ &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-2/3} dx \\ &= 3\pi (a_{n+1}^{1/3} - a_n^{1/3}) \\ &= \sqrt{3}\pi (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}). \end{aligned}$$

平方根の差を有理化すると

$$V_n = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}.$$

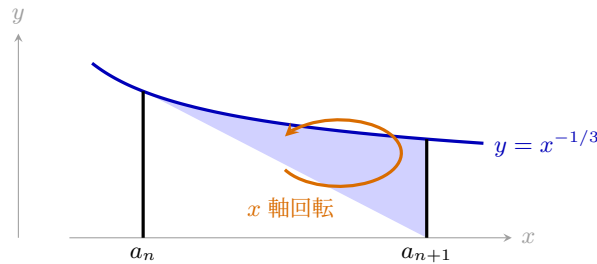
したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2+3/n} + \sqrt{2+1/n}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \pi\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

よって求める極限は

$$\pi\sqrt{\frac{3}{2}}$$

である。



【総評】 難度 6, 計算量 5. 積分で定義された数列を明示し, 回転体の体積と極限へつなぐ標準的な融合問題である。最初の積分から $a_n^{2/3}$ を主役にするとう等差数列が現れる。体積では半径の平方を積分するため指数が $-2/3$ へ変わること, $a_n > 0$ を使って平方根の符号を正に定めることが重要である。最後は平方根の差を有理化すれば, 禁止された高等な極限定理を使わず処理できる。途中式から $V_n > 0$ も明らかである。18 分程度が目安である。

【第 4 問 (a)】

原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円に, 円外の点 $P(x_0, y_0)$ から 2 本の接線を引く。

- (1) 2 つの接点の中点を Q とするとき, 点 Q の座標 (x_1, y_1) を点 P の座標 (x_0, y_0) を用いて表せ。また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ。
- (2) 点 P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ。

▶ 解法 1 (接触弦の方程式)

【方針】

単位円上の接点 (u, v) における接線は $ux + vy = 1$ である。接線が P を通る条件から, 2 接点を結ぶ直線は $x_0x + y_0y = 1$ となる。その中点 Q は原点からこの直線への垂線の足である。(2) では $Q = P/OP^2$ を逆にして $P = Q/OQ^2$ と表し, 直線条件を代入する。最後に原点が実現しないことを除く。

【解答】

(1)

単位円上の点 $R(u, v)$ における接線は

$$ux + vy = 1$$

である。この接線が $P(x_0, y_0)$ を通る条件は

$$ux_0 + vy_0 = 1.$$

したがって 2 つの接点はいずれも直線

$$x_0x + y_0y = 1 \tag{1}$$

上にある。(1) は 2 接点を結ぶ弦の直線である。

その中点 Q は, 原点から (1) へ下ろした垂線の足である。(1) の法線ベクトルは (x_0, y_0) なので, ある実数 λ を用いて

$$Q = (\lambda x_0, \lambda y_0)$$

と書ける。(1) へ代入すると

$$\lambda(x_0^2 + y_0^2) = 1.$$

よって

$$Q(x_1, y_1) = \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right).$$

したがって

$$OQ = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{OP},$$

ゆえに

$$OP \cdot OQ = 1.$$

(2)

$Q = (x, y)$ とおく。(1) の関係を逆にすると

$$P = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

P が $x + y = 2$ 上にある条件は

$$\frac{x + y}{x^2 + y^2} = 2.$$

よって

$$2(x^2 + y^2) - x - y = 0.$$

平方完成すると

$$\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{8}. \quad (2)$$

逆に, (2) 上の原点以外の点 Q から上式で P を定めれば, P は $x + y = 2$ 上にある。また, (2) の円は中心の原点からの距離と半径がともに $\sqrt{1/8}$ であるから

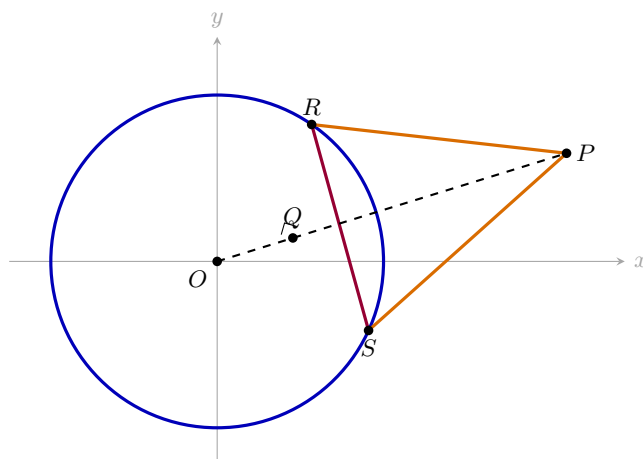
$$0 < OQ \leq 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

したがって $OP = 1/OQ > 1$ となり, P は円外の点である。ゆえに十分性も成り立つ。

よって軌跡は

$$\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{8}$$

で表される円から原点を除いたものである。



接触弦 RS の中点 Q は OP 上にあり, $OP \cdot OQ = 1$ 。

▶ 解法 2 (相似を用いる)

【方針】

2 接点を R, S とする。 $OR = OS$ かつ $PR = PS$ なので、直線 OP は弦 RS の垂直二等分線であり、 O, Q, P は一直線上にある。直角三角形 $\triangle OPR$ と $\triangle ORQ$ の相似から $OP \cdot OQ = 1$ を得る。座標は Q が P 方向にあることと距離の積から決める。

【解答】

(1)

2 接点を R, S とする。

$$OR = OS = 1, \quad PR = PS$$

であるから、 O と P はいずれも線分 RS の垂直二等分線上にある。したがって O, Q, P は一直線上にあり、

$$OP \perp RS.$$

$\angle ORP = 90^\circ$, $\angle OQR = 90^\circ$ であり、さらに O, Q, P が一直線上なので

$$\angle POR = \angle ROQ.$$

よって

$$\triangle OPR \sim \triangle ORQ.$$

対応する辺の比から

$$OP : OR = OR : OQ.$$

$OR = 1$ より

$$OP \cdot OQ = 1.$$

Q は O から P へ向かう半直線上にあるので

$$\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP} \quad (\lambda > 0)$$

と書ける。距離の積から

$$\lambda OP^2 = 1.$$

したがって

$$\lambda = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}$$

であり、

$$Q = \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right).$$

(2)

$Q = (x, y) \neq (0, 0)$ とすると

$$P = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

P が $x + y = 2$ 上にある条件を代入すれば

$$2(x^2 + y^2) = x + y,$$

すなわち

$$\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

この円上では $OQ \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ であるから、原点以外の各点は円外の点 P へ逆に対応する。よって求める軌跡はこの円から原点を除いたものである。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 接点の中点を「接触弦への垂線の足」と見る座標解法と、二つの直角三角形の相似を使う幾何解法を収録した。どちらも写像 $Q = P/OP^2$ に帰着し、これは半径 1 の円に関する反転の関係である。(2) では方程式を得るだけでなく逆向きも確認し、円外条件が満たされることを示す。完成した円は原点を通るが、原点は有限の P に対応しないため必ず除く。15 分程度が目安である。

【第 4 問 (b)】

袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し、出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後、赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

- (1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ。
 (2) 一般の N に対し $p_N(m)$ ($1 \leq m \leq N+1$) を求めよ。

▶ 解法 1 (確率漸化式と帰納法)

【方針】

黄と青をまとめて「赤以外」とみなす。初めの個数は赤 1, 赤以外 2 である。(1) は 3 回の直接計算で比を出す。(2) では N 回後の全体が $N+3$ 個であることから、赤玉数の遷移式を立てる。(1) から予想される一次式型の分布を数学的帰納法で証明し、端点も確認する。

【解答】

(1)

黄と青をまとめて「赤以外」とする。赤を引く回数が 0, 1, 2, 3 回の場合をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} p_3(1) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}, & p_3(2) &= 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}, \\ p_3(3) &= 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{10}, & p_3(4) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

したがって

$$p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4) = 4 : 3 : 2 : 1.$$

(2)

N 回後の全体の玉数は $N+3$ 個である。次の操作後に赤玉が m 個となる場合を直前の赤玉数で分けると

$$\begin{aligned} p_{N+1}(m) &= \frac{m-1}{N+3} p_N(m-1) \\ &\quad + \frac{N+3-m}{N+3} p_N(m). \end{aligned} \tag{1}$$

範囲外の確率は 0 とする。

$$p_N(m) = \frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)} \quad (1 \leq m \leq N+1) \tag{2}$$

を数学的帰納法で示す。 $N=1$ では

$$p_1(1) = \frac{2}{3}, \quad p_1(2) = \frac{1}{3}$$

なので (2) が成り立つ。

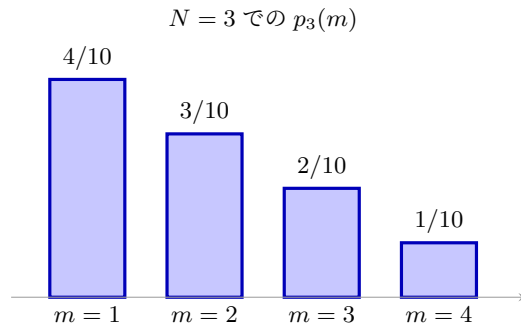
$N=k$ で (2) が成り立つと仮定する。 $2 \leq m \leq k+1$ について (1) へ代入すると

$$\begin{aligned} p_{k+1}(m) &= \frac{m-1}{k+3} \frac{2(k-m+3)}{(k+1)(k+2)} \\ &\quad + \frac{k+3-m}{k+3} \frac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2(k+3-m)}{(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

端点 $m=1, k+2$ でも、消える項を 0 とみなせば同じ式が成り立つ。これは $N=k+1$ での (2) である。

以上より

$$p_N(m) = \frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)} \quad (1 \leq m \leq N+1).$$



初期に赤以外が 2 個あるため、確率は右下がりになる。

▶ 解法 2 (出現順序を数える)

【方針】

赤以外の 2 色を一つの群としてまとめる。 N 回中、赤を $k = m - 1$ 回引く順序を固定すると、赤側の分子は $1 \cdot 2 \cdots k$ 、赤以外側は初期値 2 から始まるので $2 \cdot 3 \cdots (N - k + 1)$ となる。固定順序の確率に ${}_N C_k$ を掛ければ一般式が直接得られる。

【解答】

(1)

以下の一般式に $N = 3$ を代入すると

$$p_3(m) = \frac{5 - m}{10} \quad (1 \leq m \leq 4).$$

したがって

$$p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4) = 4 : 3 : 2 : 1.$$

(2)

黄と青をまとめて「赤以外」とみなす。初めに赤は 1 個、赤以外は 2 個ある。 N 回中、赤を引く回数を

$$k = m - 1$$

とする。

赤が k 回、赤以外が $N - k$ 回出る順序を一つ固定する。赤を引く各回の分子の積は $k!$ 、赤以外を引く各回の分子の積は

$$2 \cdot 3 \cdots (N - k + 1) = (N - k + 1)!$$

である。各回の全玉数の積は

$$3 \cdot 4 \cdots (N + 2) = \frac{(N + 2)!}{2}.$$

したがって固定順序の確率は

$$\frac{2k!(N - k + 1)!}{(N + 2)!}.$$

これは順序によらない。赤が出る位置は ${}_N C_k$ 通りだから

$$\begin{aligned} p_N(k + 1) &= {}_N C_k \frac{2k!(N - k + 1)!}{(N + 2)!} \\ &= \frac{2(N - k + 1)}{(N + 1)(N + 2)}. \end{aligned}$$

$k = m - 1$ より

$$p_N(m) = \frac{2(N - m + 2)}{(N + 1)(N + 2)} \quad (1 \leq m \leq N + 1)$$

を得る。

【総評】 難度 7, 計算量 5。文系第 3 問 (b) と同じ Pólya 型だが、赤以外が初めに 2 個あるため分布は一樣ではなく m に関する右下がりの一次式になる。解法 1 では全玉数 $N + 3$ と赤以外の個数 $N + 3 - m$ を正確に置き、帰納法の端点も確認する。解法 2 は初期個数 2 が階乗 $(N - k + 1)!$ に反映される構造を示す。問題本文の既存転記にあった「出た玉を同じ色の玉」は、照合済み原文どおり「出た玉と同じ色の玉」へ訂正した。18 分から 20 分が目安である。