

名古屋大学 2011 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ とする. xyz 空間内の平面 $z = 0$ の上に長方形

$$R_s = \{(x, y, 0) | 1 \leq x \leq 2 + 4s, 1 \leq y \leq 2 - 3s\}$$

がある. 長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする.

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値, およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ.

(2) s を (1) で求めた値とする. このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ.

【方針】

(1) は, 長方形を x 軸まわりに回転すると, x 方向の長さ $1 + 4s$ と, 内半径 1 ・外半径 $2 - 3s$ の円環断面積の積で体積が出る. $-1/4 < s < 1/3$ により長さも外半径も正であることを確認し, s の 3 次式を微分して最大値を求める. (2) は (1) で $s = 0$ と分かった後, K_0 を $1 \leq x \leq 2, 1 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$ と表す. さらに y 軸まわりに回転した後の, 固定した y における断面を xz 平面内の円環として見て, $|y| \leq 1$ と $1 \leq |y| \leq 2$ に分けて積分する.

【解答】

(1) 長方形 R_s の x 方向の長さは $(2 + 4s) - 1 = 1 + 4s$ である. また, x を固定した断面を x 軸のまわりに回転すると, 内半径 1 、外半径 $2 - 3s$ の円環ができる. 条件 $-1/4 < s < 1/3$ より $1 + 4s > 0$, $2 - 3s > 1$ である.

したがって体積は $V(s) = \pi(1 + 4s) \{(2 - 3s)^2 - 1^2\}$ である. 整理すると $(2 - 3s)^2 - 1 = 4 - 12s + 9s^2 - 1 = 3 - 12s + 9s^2$ なので $V(s) = \pi(1 + 4s)(3 - 12s + 9s^2)$ である. 展開して $V(s) = \pi(36s^3 - 39s^2 + 3)$ であるから $V'(s) = \pi(108s^2 - 78s) = 6\pi s(18s - 13)$ となる.

区間 $-1/4 < s < 1/3$ に入る臨界点は $s = 0$ だけである. $s < 0$ では $s < 0, 18s - 13 < 0$ なので $V'(s) > 0$, $0 < s < 1/3$ では $s > 0, 18s - 13 < 0$ なので $V'(s) < 0$ である. よって $V(s)$ は $s = 0$ で最大となる.

このとき $V(0) = \pi \cdot 1 \cdot (4 - 1) = 3\pi$ である. したがって $s = 0$, $V(0) = 3\pi$ である.

(2) (1) より $s = 0$ とする. このとき K_0 は $1 \leq x \leq 2, 1 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$ を満たす点全体である.

この立体を y 軸のまわりに回転した立体 L の体積を, y を固定した断面で求める. 固定した y に対し, 回転後の断面は xz 平面内で原点を中心とする円環または円板になる. 半径の 2 乗は $x^2 + z^2$ である.

まず $|y| \leq 1$ のとき, 条件 $1 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$ は $1 - y^2 \leq z^2 \leq 4 - y^2$ を意味する. さらに $1 \leq x \leq 2$ なので, 回転後の半径の 2 乗の最小値は $1^2 + (1 - y^2) = 2 - y^2$ であり, 最大値は $2^2 + (4 - y^2) = 8 - y^2$ である. したがって断面積は $\pi\{(8 - y^2) - (2 - y^2)\} = 6\pi$ である.

次に $1 \leq |y| \leq 2$ のとき, $\sqrt{y^2 + z^2} \geq 1$ は自動的に満たされ, $0 \leq z^2 \leq 4 - y^2$ である. このとき半径の 2 乗の最小値は $1^2 + 0 = 1$ であり, 最大値は $2^2 + (4 - y^2) = 8 - y^2$ である. したがって断面積は $\pi\{(8 - y^2) - 1\} = \pi(7 - y^2)$ である. $|y| > 2$ では断面は存在しない.

よって体積は

$$\int_{-1}^1 6\pi dy + 2 \int_1^2 \pi(7 - y^2) dy$$

である. 第 1 項は

$$\int_{-1}^1 6\pi dy = 12\pi$$

であり,

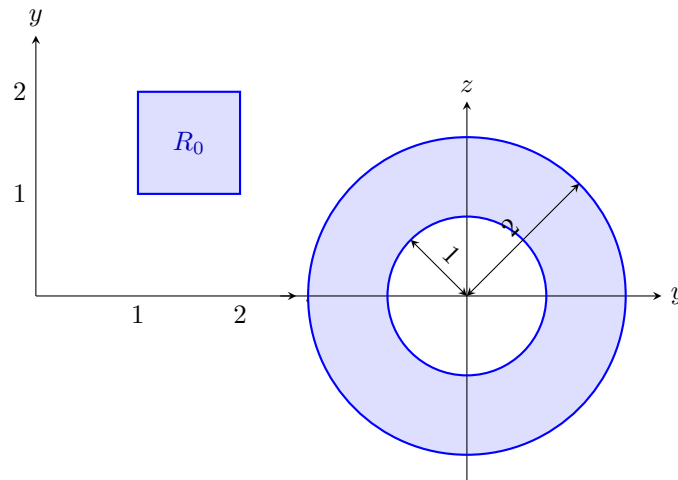
$$2 \int_1^2 \pi(7 - y^2) dy = 2\pi \left[7y - \frac{y^3}{3} \right]_1^2 = 2\pi \left(\frac{34}{3} - \frac{20}{3} \right) = \frac{28\pi}{3}$$

である. したがって求める体積は

$$12\pi + \frac{28\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

である.

$s = 0$ のときの長方形 R_0 と、 x を固定した K_0 の yz 断面は次のようになる。断面は内半径 1、外半径 2 の円環である。



【総評】 前半は回転体の体積と 1 変数最大化、後半はさらに回転した立体の断面積計算である。目安時間は 28 分。(1) は円環断面の外半径と内半径を取り違えず、 $s = 0$ 以外の臨界点 $13/18$ が範囲外であることを確認する。(2) は立体をもう一度回転するため、単純な円柱や円環の体積公式をそのまま使えない。固定した y で見ると、 $|y| \leq 1$ と $1 \leq |y| \leq 2$ で内側半径が変わる。この場合分けと、半径の 2 乗の差で断面積を出すことが採点の中心である。

【第 2 問】

$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。整数 $n \geq 1$ に対して、次の試行により行列 A_{n-1} から行列 A_n を定める。

「数字の組 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ を 1 つずつ書いた 4 枚の札が入っている袋から 1 枚を取り出し、その札に書かれている数字の組が (i, j) のとき、 A_{n-1} の (i, j) 成分に 1 を加えた行列を A_n とする。」

この試行を n 回 ($n = 2, 3, 4, \dots$) くり返した後に、 $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ が逆行列をもたず A_n は逆行列をもつ確率を p_n とする。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) $(n-1)$ 回 ($n = 2, 3, 4, \dots$) の試行をくり返した後に、 A_{n-1} の第 1 行の成分がいずれも正で第 2 行の成分はいずれも 0 である確率 q_{n-1} を求めよ。
- (3) p_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各試行は 4 つの成分のうち 1 つを 1 増やす操作であり、 2×2 行列が正則になるかは行列式で判定する。(1) は短い列を直接数える。2 回目で初めて正則になるには対角または反対角の 2 成分を 1 回ずつ選ぶ。3 回目では、2 回後に同じ 1 成分だけが正の場合と、同じ行または同じ列の 2 成分が正の場合から、3 回目に外側を選ぶ場合を数える。(2) は第 1 行の 2 成分だけが正になる確率で、 $(1, 1), (1, 2)$ だけを使い、かつ両方が少なくとも 1 回出る場合を数える。(3) は初めて正則になる直前の状態が、1 つの行・列に限られる場合、または 1 成分だけの場合に分かれることを使って一般項を出す。

【解答】

(1) 2 回の試行後に初めて正則になる場合を考える。1 回後の行列は 1 つの成分だけが 1 で、必ず正則でない。2 回後に正則になるには、選ばれた 2 つの成分が対角成分 $(1, 1), (2, 2)$ であるか、反対角成分 $(1, 2), (2, 1)$ であればよい。それぞれ順序が 2 通りあるので、有利な列は $2 + 2 = 4$ 通りである。全体は 4^2 通りだから $p_2 = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$ である。

次に p_3 を求める。3 回目で初めて正則になるには、2 回後までは正則でなく、3 回目で正則になればよい。

2 回後に同じ成分だけが 2 回選ばれている場合は 4 通りである。この状態から正則にするには、反対側の対角成分を選ぶしかないで、3 回目の選び方は 1 通りである。したがってこの型は 4 通りである。

2 回後に同じ行または同じ列の 2 成分が 1 回ずつ選ばれている場合を考える。行は 2 本、列は 2 本あり、それぞれ 2 成分の

選ばれる順序が 2 通りあるので $4 \cdot 2 = 8$ 通りである。この状態からは、その行または列の外側にある 2 成分のどちらを選んでも行列式は 0 でなくなる。したがって 3 回目の選び方は 2 通りで、この型は $8 \cdot 2 = 16$ 通りである。

よって有利な 3 回の列は $4 + 16 = 20$ 通りであり、全体は $4^3 = 64$ 通りだから $p_3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ である。

(2) $(n-1)$ 回後に第 1 行の成分がいずれも正で、第 2 行の成分がいずれも 0 であるためには、 $(n-1)$ 回のすべてで $(1, 1)$ または $(1, 2)$ の札を選び、しかも $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ の両方が少なくとも 1 回ずつ選ばれればよい。 $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ だけを使う列は 2^{n-1} 通りである。このうち $(1, 1)$ だけ、または $(1, 2)$ だけの列がそれぞれ 1 通りずつあるので、両方が少なくとも 1 回出る列は $2^{n-1} - 2$ 通りである。全体は 4^{n-1} 通りだから $q_{n-1} = \frac{2^{n-1} - 2}{4^{n-1}}$ である。

(3) $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ がすべて正則でないまま進んだとする。このとき $(n-1)$ 回後の正の成分の位置は、1 つの行に含まれるか、1 つの列に含まれるか、または 1 つの成分だけである。実際、2 つの行にも 2 つの列にもまたがる正の成分が現れると、どこかの時点で行列式が 0 でなくなる。

まず、1 つの行または 1 つの列の 2 成分がともに正である場合を数える。行 2 本、列 2 本の合計 4 通りがあり、それぞれの確率は (2) と同じく $q_{n-1} = \frac{2^{n-1} - 2}{4^{n-1}}$ である。この状態から次の 1 回で正則になるには、その行または列の外側の成分を選ばばよい。外側の成分は 2 個なので、その確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ である。したがってこの場合の寄与は $4q_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = 2q_{n-1}$ である。

次に、同じ 1 成分だけが $(n-1)$ 回選ばれていた場合を数える。成分の選び方は 4 通りで、それぞれの確率は $(1/4)^{n-1}$ である。この状態から次の 1 回で正則になるには、反対側の対角成分を選ぶ必要があり、その確率は $1/4$ である。よってこの場合の寄与は $4 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^{n-1}}$ である。

以上より

$$p_n = 2q_{n-1} + \frac{1}{4^{n-1}} = 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 2}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{2^n - 3}{4^{n-1}}$$

である。これは $n = 2, 3$ の結果とも一致する。

直前まで 1 行内に閉じ込められていた場合、外側の成分を 1 つ増やすと行列式が 0 でなくなる。列の場合も同様である。

r	s	外側を選ぶ →	r	s
0	0		1	0
$r, s > 0$			$\det = -s \neq 0$	

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は短い列と第 1 行だけを使う列を直接数える。(3) は、最初から第 k 回まで正則にならない札の列全体を数える。全ての接頭列が特異であるための必要十分条件は、選ばれた成分の位置が 1 本の行または 1 本の列に含まれることである。行・列 4 本の列を包除して生存確率を求め、第 $n-1$ 回までの生存確率から第 n 回までの生存確率を引く。

【解答】

(1) 2 回目で初めて正則になる列は、2 つの対角位置または 2 つの反対角位置を順序をつけて選ぶ 4 列である。よって

$$p_2 = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$$

である。3 回目で初めて正則になる列は、同じ成分を 2 回選んだ 4 列から反対側を選ぶ 4 列と、1 行または 1 列の 2 成分を選んだ 8 列から外側を選ぶ 16 列である。したがって

$$p_3 = \frac{4 + 16}{4^3} = \frac{5}{16}$$

となる。

(2) 第 1 行の 2 成分だけを使う列は 2^{n-1} 列であり、そのうち一方だけを使う 2 列を除けばよい。

したがって

$$q_{n-1} = \frac{2^{n-1} - 2}{4^{n-1}}$$

である。

(3) 第 k 回まで一度も正則にならないための必要十分条件は、それまでに選んだ成分の位置が 1 本の行または 1 本の列に含まれることである。実際、この状態なら行列式は常に 0 である。逆に初めて 1 本の行・列に収まらなくなる瞬間には、直前の 2 成分を含む行または列の外側が選ばれ、できた 2×2 小配置の行列式は 0 でない。

固定した 1 本の行または列だけを使う長さ k の列は 2^k 列で、行・列は合わせて 4 本ある。ただし 1 つの成分だけを使う 4 列は、その成分を含む行と列で 2 回ずつ数えている。したがって、第 k 回まで正則にならない列は

$$4 \cdot 2^k - 4$$

列であり、その確率を T_k とすると

$$T_k = \frac{4 \cdot 2^k - 4}{4^k}$$

である。

第 n 回で初めて正則になる確率は

$$\begin{aligned} p_n &= T_{n-1} - T_n \\ &= \frac{4 \cdot 2^{n-1} - 4}{4^{n-1}} - \frac{4 \cdot 2^n - 4}{4^n} \\ &= \frac{2^n - 3}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。

【総評】「初めて正則になる」条件を、直前までの非正則な履歴として分類する問題である。目安時間は 28 分。行列式を直接追いつけるより、正の成分の位置が 1 つの行・列に閉じ込められている限り非正則で、そこから外へ出ると正則になる、という構造で見るとよい。ただし、1 成分だけが繰り返し選ばれている場合は、(2) の q_{n-1} には含まれないため別に足す必要がある。 p_3 の 20 通りを丁寧に数えておくと、一般式の係数 $4, 1/2$ の意味も確認しやすい。

【第 3 問】

xy 平面上に 3 点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ がある。

- (1) $a > 0$ とする。 $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。
- (2) $a > 0$, $b > 0$ とする。 $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

【方針】

文系第 3 問と同じく $P(x, y)$ とおき、距離比を 2 乗して処理する。(1) は $AP = aOP$ からアポロニウスの円を求め、 $a = 1$ だけ垂直二等分線になることを分ける。(2) は $u = OP^2$ を導入し、 $AP = aOP$, $BP = bOP$ から x, y を u で表す。これを $x^2 + y^2 = u$ に代入して得られる 2 次方程式が正の解をもつ条件を判別式で整理する。理系版では $a > 0, b > 0$ 全体なので、最終条件は $|a - b| \leq \sqrt{2} \leq a + b$ となる。

【解答】

(1) $P(x, y)$ とおく。条件 $OP : AP = 1 : a$ は $AP = aOP$ である。両辺を 2 乗すると $(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ である。整理して $(1-a^2)(x^2 + y^2) - 2x + 1 = 0$ を得る。 $a = 1$ のとき、この式は $-2x + 1 = 0$ となる。したがって軌跡は $x = \frac{1}{2}$ である。 $a \neq 1$ のときは $x^2 + y^2 + \frac{2x}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1} = 0$ となる。平方完成して $\left(x + \frac{1}{a^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(a^2-1)^2}$ である。よって軌跡は

$$\text{中心 } \left(-\frac{1}{a^2-1}, 0\right), \text{ 半径 } \frac{a}{|a^2-1|} \text{ の円}$$

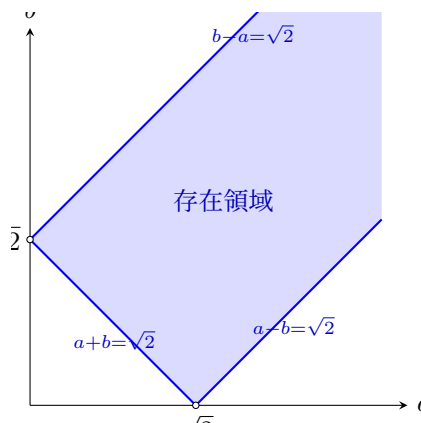
である。

(2) $u = OP^2 = x^2 + y^2$ とおく。条件は $AP = aOP$, $BP = bOP$ であるから $(x-1)^2 + y^2 = a^2u$, $x^2 + (y-1)^2 = b^2u$ である。これらを整理すると $2x - 1 = (1-a^2)u$, $2y - 1 = (1-b^2)u$ である。したがって $x = \frac{1 + (1-a^2)u}{2}$, $y = \frac{1 + (1-b^2)u}{2}$ である。

これを $x^2 + y^2 = u$ に代入すると $\{(1-a^2)^2 + (1-b^2)^2\}u^2 - 2(a^2 + b^2)u + 2 = 0$ を得る。この方程式が正の実数解をもつことが、点 P が存在するための条件である。なお $a = b = 1$ のときは 2 次の係数が 0 になり、式は $-4u + 2 = 0$ となって正の解 $u = 1/2$ をもつ。以下ではこの場合も含めて条件を整理する。

判別式を整理すると $(a^2 + b^2)^2 - 2\{(1-a^2)^2 + (1-b^2)^2\} \geq 0$ であり、左辺は $\{(a+b)^2 - 2\}\{2 - (a-b)^2\}$ と因数分解できる。 $a > 0, b > 0$ であるから、正の解の存在条件は $(a+b)^2 \geq 2$, $(a-b)^2 \leq 2$ である。すなわち $|a-b| \leq \sqrt{2} \leq a+b$ である。 ab 平面では第 1 象限 $a > 0, b > 0$ の中で、直線 $a+b = \sqrt{2}$ の上側、かつ 2 直線 $a-b = \sqrt{2}$, $b-a = \sqrt{2}$ にはさまれる領域である。境界は条件を満たすので含む。

理系版の存在領域は、第 1 象限で 3 直線 $a+b = \sqrt{2}$, $a-b = \sqrt{2}$, $b-a = \sqrt{2}$ に囲まれる次の部分である。3 本の斜辺は含むが、座標軸上の点は含まない。



【総評】 距離比の軌跡と存在条件を合わせた問題である。目安時間は 24 分。(1) は $a = 1$ だけ直線になる点に注意する。(2) は $u = OP^2$ によって x, y を 1 変数で表す発想が重要で、判別式の因数分解に到達すれば条件は三角形の不等式に似た形 $|a-b| \leq \sqrt{2} \leq a+b$ にまとまる。理系版では a, b の大小制限がないため、第 1 象限で 2 本の平行線にはさまれ、かつ $a+b = \sqrt{2}$ 以上の領域として図示する。

【第 4 問】

a, b は $a \geq b > 0$ を満たす整数とし、 x と y の 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$, $y^2 + by + a = 0$ がそれぞれ整数解をもつとする。

- (1) $a = b$ とするとき、条件を満たす整数 a をすべて求めよ。
- (2) $a > b$ とするとき、条件を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

【方針】

係数 a, b が正なので、各 2 次方程式が整数解をもつなら、その解はともに負の整数である。そこで $x^2 + ax + b = 0$ の解を $-m, -n$, $y^2 + by + a = 0$ の解を $-r, -s$ とおき、解と係数の関係を使う。(1) は $a = b$ から $m+n = mn$ 、すなわち $(m-1)(n-1) = 1$ に帰着する。(2) は $a > b$ より $m+n > mn$ となるため、 $(m-1)(n-1) < 1$ から m, n の一方が 1 と分かる。残りを第 2 の方程式に代入して $(r-1)(s-1) = 2$ に落とす。

【解答】

(1) まず、 $x^2 + ax + b = 0$ が整数解をもつとする。 $a > 0, b > 0$ なので、2 つの整数解の和は $-a < 0$ 、積は $b > 0$ である。したがって 2 つの整数解はいずれも負である。

そこで 2 つの整数解を $-m, -n$ とおく。ただし m, n は正の整数である。解と係数の関係より $m+n = a$, $mn = b$ である。 $a = b$ のとき $m+n = mn$ である。これを变形すると $mn - m - n = 0$ すなわち $(m-1)(n-1) = 1$ である。 m, n は正の整数なので $m-1 = n-1 = 1$ であり、 $m = n = 2$ である。したがって $a = m+n = 4$ である。

実際、 $a = b = 4$ のとき $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ であり、もう一方の方程式も同じなので整数解をもつ。よって $a = 4$ である。

(2) $a > b$ とする。上と同じく、 $x^2 + ax + b = 0$ の解を $-m, -n$ とおけば $a = m+n$, $b = mn$ である。 $a > b$ より $m+n > mn$ であるから $mn - m - n < 0$ である。すなわち $(m-1)(n-1) < 1$ である。 m, n は正の整数なので $(m-1)(n-1)$ は 0 以上の整数である。したがって $(m-1)(n-1) = 0$ であり、 m, n の少なくとも一方は 1 である。対称

性より $n = 1$ としてよい。すると $a = m + 1$, $b = m$ である。

次に、 $y^2 + by + a = 0$ の整数解を $-r, -s$ とおく。ただし r, s は正の整数である。解と係数の関係より $r + s = b = m$, $rs = a = m + 1$ である。したがって $(r - 1)(s - 1) = rs - r - s + 1 = (m + 1) - m + 1 = 2$ である。 r, s は正の整数だから、 $\{r - 1, s - 1\} = \{1, 2\}$ である。よって $\{r, s\} = \{2, 3\}$ となり、 $m = r + s = 5$ である。したがって $a = m + 1 = 6$, $b = m = 5$ である。

実際、 $(a, b) = (6, 5)$ のとき $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$ であり、 $y^2 + 5y + 6 = (y + 2)(y + 3)$ なので条件を満たす。よって $(a, b) = (6, 5)$ である。

【総評】 整数解を負の整数として置き、解と係数の関係から因数分解へ落とす問題である。目安時間は 18 分。最初に、係数が正であるため整数解がともに負になることを明示するのが大切である。(1) は $(m - 1)(n - 1) = 1$ 、(2) は $a > b$ から $(m - 1)(n - 1) = 0$ と分かるところが山場である。最後に第 2 の方程式へ移り、 $(r - 1)(s - 1) = 2$ を解くと候補が一意に決まる。求めた $(6, 5)$ は必ず元の 2 方程式で検算しておく、必要条件だけで終わっていないことが示せる。