

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2012 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a を正の定数とし、 xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする。

- (1) C 上の点 $A(t, t^3 - a^2t)$ における C の接線を l とする。 l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし、 t は 0 でないとする。
- (2) b を実数とする。 C の接線のうち xy 平面上の点 $B(2a, b)$ を通るものの本数を求めよ。
- (3) C の接線のうち点 $B(2a, b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え、それらの接線を l_1, l_2 とする。ただし、 l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0, 0)$ を通らないとする。 l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし、 l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 \geq S_2$ として、次の値を求めよ。

$$\frac{S_1}{S_2}$$

第 2 問

$f_0(x) = xe^x$ として、正の整数 n に対して

$$f_n(x) = \int_{-x}^x f_{n-1}(t) dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1) $f_1(x)$ を求めよ。

(2)

$$g(x) = \int_{-x}^x (at + b)e^t dt$$

とするとき、定積分

$$\int_{-c}^c g(x) dx$$

を求めよ。ただし、実数 a, b, c は定数とする。

(3) 正の整数 n に対して、 $f_{2n}(x)$ を求めよ。

第 3 問

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから、1 枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とする。次の問に答えよ。ただし、 j と k は正の整数で、 $j + k \leq n$ を満たすとする。また、 s は $n - 1$ 以下の正の整数とする。

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j + k$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = j$ かつ $Y = j + k$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。 $P(s)$ を求めよ。
- (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ。

第 4 問

m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

- (1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
- (2) $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) $(p - 1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。
- (4) r を正の整数とし, $s = 3^{r-1}m$ とする。 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)