

名古屋大学 2012 年度 理系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を正の定数とし、 xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする。

- (1) C 上の点 $A(t, t^3 - a^2t)$ における C の接線を l とする。 l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし、 t は 0 でないとする。
- (2) b を実数とする。 C の接線のうち xy 平面上の点 $B(2a, b)$ を通るものの本数を求めよ。
- (3) C の接線のうち点 $B(2a, b)$ を通るものが 2 本の場合を考え、それらの接線を l_1, l_2 とする。ただし、 l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0, 0)$ を通らないとする。 l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし、 l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 \geq S_2$ として、次の値を求めよ。

$$\frac{S_1}{S_2}$$

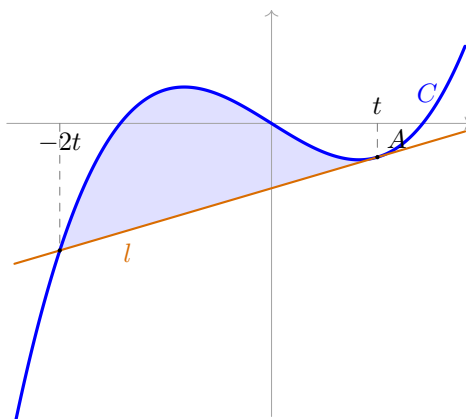
【方針】

接点を t として接線を作り、曲線との差を因数分解する。3 次曲線と接線は接点で重なって接するため、差は $(x-t)^2$ を因数にもつ。もう一つの交点 $x = -2t$ まで積分すれば、面積は t^4 に比例する。(2) は接点を u とした接線が $B(2a, b)$ を通る条件を作り、 u/a で無次元化して 3 次関数の値域と交点数を調べる。(3) は接線が 2 本だけになる境界値のうち、原点を通る接線を含む場合を除き、残った 2 接点の t^4 の比から面積比を出す。

【解答】

(1) 曲線 $y = x^3 - a^2x$ の導関数は $y' = 3x^2 - a^2$ である。したがって C 上の点 $A(t, t^3 - a^2t)$ における接線 l は $y - (t^3 - a^2t) = (3t^2 - a^2)(x - t)$ であり、整理して $y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3$ である。

曲線と接線の差をとると $x^3 - a^2x - \{(3t^2 - a^2)x - 2t^3\} = x^3 - 3t^2x + 2t^3$ である。右辺は $x = t$ を重解にもつので $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = (x - t)^2(x + 2t)$ と因数分解できる。よって接点以外の交点は $x = -2t$ である。 $t > 0$ の場合の曲線と接線の位置関係は、例えば $a = 1, t = 0.7$ として描くと次のようになる。



まず $t > 0$ とする。このとき区間 $[-2t, t]$ では $x + 2t \geq 0$ であり、曲線が接線より上にある。したがって面積は

$$S(t) = \int_{-2t}^t (x - t)^2(x + 2t) dx$$

である。ここで $x = tu$ とおくと

$$S(t) = t^4 \int_{-2}^1 (u - 1)^2(u + 2) du$$

であり、

$$\int_{-2}^1 (u - 1)^2(u + 2) du = \int_{-2}^1 (u^3 - 3u + 2) du = \frac{27}{4}$$

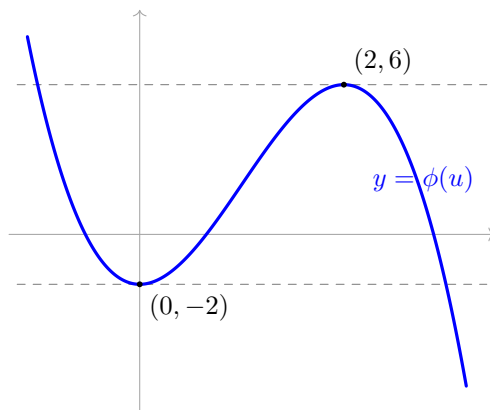
である。よって $S(t) = \frac{27}{4}t^4$ である。 $t < 0$ の場合は積分区間の左右が入れ替わり、曲線と接線の上下も逆になるが、面積は絶対値をとるので同じ式になる。したがって $S(t) = \frac{27}{4}t^4$ である。

(2) 接点の x 座標を t とする。上で求めた接線が点 $B(2a, b)$ を通る条件は $b = (3t^2 - a^2)2a - 2t^3$ である。すなわち $b = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$ である。

ここで $u = \frac{t}{a}$, $c = \frac{b}{a^3}$ とおく。 $a > 0$ なので t と u は 1 対 1 に対応する。条件は $c = -2u^3 + 6u^2 - 2$ となる。右辺を $\phi(u) = -2u^3 + 6u^2 - 2$ とおくと $\phi'(u) = -6u^2 + 12u = -6u(u - 2)$ である。したがって ϕ は $(-\infty, 0)$ で減少、 $(0, 2)$ で増加、 $(2, \infty)$ で減少する。また $\phi(0) = -2$, $\phi(2) = 6$ であり、

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \phi(u) = -\infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = -\infty$$

である。接線本数は、次の ϕ のグラフと水平線 $y = b/a^3$ の交点数として読める。



よって水平線 $y = c$ との交点数を数えれば、接線の本数は

$$\begin{cases} 1 & (b < -2a^3), \\ 2 & (b = -2a^3), \\ 3 & (-2a^3 < b < 6a^3), \\ 2 & (b = 6a^3), \\ 1 & (b > 6a^3) \end{cases}$$

である。

(3) 接線が 2 本のみになるのは、(2) より $b = -2a^3$ または $b = 6a^3$ の場合である。

まず $b = -2a^3$ の場合を考える。このとき $c = -2$ であり、方程式 $-2u^3 + 6u^2 - 2 = -2$ は $-2u^2(u - 3) = 0$ となる。したがって接点は $u = 0$ と $u = 3$ に対応する。このうち $u = 0$ 、すなわち $t = 0$ の接線は $y = -a^2x$ であり、原点を通る。これは問題の条件から除かれる。

次に $b = 6a^3$ の場合を考える。このとき $c = 6$ であり、方程式 $-2u^3 + 6u^2 - 2 = 6$ は $-2(u - 2)^2(u + 1) = 0$ となる。したがって異なる接点は $u = -1$, $u = 2$ であり、すなわち $t = -a$, $t = 2a$ である。どちらも $t \neq 0$ なので、それぞれの接線は原点を通らない。

(1) より、接線と曲線で囲まれる面積は $(27/4)t^4$ である。したがって 2 つの面積は比例定数を除いて $(-a)^4$, $(2a)^4$ に比例する。大きい方を S_1 、小さい方を S_2 とすれば $\frac{S_1}{S_2} = \frac{(2a)^4}{a^4} = 16$ である。よって $\frac{S_1}{S_2} = 16$ である。

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。接線の接点を媒介変数にして、面積と本数分類の両方を同じ文字で処理する問題である。(1) では曲線と接線の差が $(x - t)^2(x + 2t)$ になること、 $t < 0$ でも面積が同じ t^4 の式になることを確認したい。(2) では $u = t/a$ による無次元化で $\phi(u) = -2u^3 + 6u^2 - 2$ のグラフを読むのが核心である。(3) は接線が 2 本となる 2 つの境界値のうち、 $t = 0$ の接線が原点を通る場合を除くところが落とし穴になる。

【第 2 問】

$f_0(x) = xe^x$ として、正の整数 n に対して

$$f_n(x) = \int_{-x}^x f_{n-1}(t) dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1) $f_1(x)$ を求めよ。

(2)

$$g(x) = \int_{-x}^x (at + b)e^t dt$$

とするとき、定積分

$$\int_{-c}^c g(x) dx$$

を求めよ。ただし、実数 a, b, c は定数とする。

(3) 正の整数 n に対して、 $f_{2n}(x)$ を求めよ。

【方針】

(1) は定義に従って f_0 の積分と微分を直接計算する。(2) は積分区間が $[-x, x]$ であることから、 x を $-x$ に替えると積分の向きが逆になるので g が奇関数になることを使う。(3) は 1 回の操作では e^x と e^{-x} が混ざるが、2 回作用させると $(Ax + B)e^x$ 型に戻ることを示す。係数 A_n, B_n の漸化式を作り、 A_n は等比、 B_n は 3^n で割って階差に直して解く。

【解答】

(1) $f_0(x) = xe^x$ である。部分積分により

$$\int te^t dt = (t-1)e^t$$

だから

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x te^t dt &= (x-1)e^x - (-x-1)e^{-x} \\ &= (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

また

$$f'_0(x) = (x+1)e^x$$

である。したがって

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)e^x + (x+1)e^{-x} + (x+1)e^x \\ &= 2xe^x + (x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

(2)

$$g(x) = \int_{-x}^x (at + b)e^t dt$$

において x を $-x$ に替えると、積分区間の向きが逆になるので

$$\begin{aligned} g(-x) &= \int_x^{-x} (at + b)e^t dt \\ &= - \int_{-x}^x (at + b)e^t dt \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

よって g は奇関数である。 c の符号にかかわらず、向きも含めた対称区間の積分は

$$\int_{-c}^c g(x) dx = 0$$

となる。

(3) 関数 F に対する問題の操作を

$$T(F)(x) = \int_{-x}^x F(t) dt + F'(x)$$

と書く。まず

$$F(x) = (Ax + B)e^x$$

とおくと

$$\int_{-x}^x (At + B)e^t dt = (Ax - A + B)e^x + (Ax + A - B)e^{-x}$$

であり、

$$F'(x) = (Ax + A + B)e^x$$

である。したがって

$$T(F)(x) = 2(Ax + B)e^x + (Ax + A - B)e^{-x}.$$

この式にもう一度 T を作用させると

$$\int_{-x}^x T(F)(t) dt = (Ax + B)e^x + (Ax - B)e^{-x}$$

および

$$\{T(F)(x)\}' = 2(Ax + A + B)e^x + (-Ax + B)e^{-x}$$

を得る。両式を足すと e^{-x} の項が消えて

$$T^2(F)(x) = (3Ax + 2A + 3B)e^x$$

となる。

$$f_{2n}(x) = (A_n x + B_n)e^x$$

とおく。 $f_0(x) = xe^x$ より

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0.$$

また上の T^2 の式から

$$A_{n+1} = 3A_n, \quad B_{n+1} = 2A_n + 3B_n$$

である。よって $A_n = 3^n$ である。

さらに

$$B_{n+1} = 2 \cdot 3^n + 3B_n$$

の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{B_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{B_n}{3^n} = \frac{2}{3}.$$

$B_0 = 0$ から n 項分を加えて

$$\frac{B_n}{3^n} = \frac{2n}{3}, \quad B_n = 2n \cdot 3^{n-1}$$

を得る。したがって

$$f_{2n}(x) = (3^n x + 2n \cdot 3^{n-1})e^x = 3^{n-1}(3x + 2n)e^x$$

である。

【総評】 難度 7、目安時間 24 分。1 回の操作では e^x と e^{-x} が混ざるため見通しが悪いが、2 回作用させると $(Ax + B)e^x$ 型に戻るのが核心である。(2) の奇関数性は、積分区間の向きが反転するだけで示せるので短く確実に処理したい。(3) では $T(F)$ と $T^2(F)$ の途中式を書き、 e^{-x} の項が消えることを見せると答案の説得力が上がる。係数 B_n は 3^n で割って階差に直すのが最も安全である。

【第 3 問】

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから、1 枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とする。次の問に答えよ。ただし、 j と k は正の整数で、 $j+k \leq n$ を満たすとする。また、 s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。 $P(s)$ を求めよ。
- (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

復元抽出なので、3 回の結果はすべて n^3 通りで同様に確からしい。(1) は最小値と最大値の条件を「3 回とも指定区間に入る」と言い換える。(2) はその区間内に入ったうえで、左端 j と右端 $j+k$ が少なくとも 1 回ずつ出る条件を包除原理で数える。(3) は幅 s の区間の左端を j として動かし、(2) の結果を足し合わせる。(4) は $P(s)$ の最大化を $s(n-s)$ の最大化に帰着し、 n が偶数なので頂点 $s = n/2$ が整数として許されることを確認する。

【解答】

(1) 3 回の試行の結果を順に Z_1, Z_2, Z_3 とする。復元抽出なので、全事象は n^3 通りで同様に確からしい。

条件 $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ は、3 回の結果がすべて $j, j+1, \dots, j+k$ の中に入ることと同値である。この区間には $k+1$ 個の整数があるので、条件を満たす取り出し方は $(k+1)^3$ 通りである。よって確率は $\left(\frac{k+1}{n}\right)^3$ である。

(2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となるには、3 回の結果がすべて $j, j+1, \dots, j+k$ に入り、さらに左端 j と右端 $j+k$ が少なくとも 1 回ずつ出ればよい。

区間内だけから選ぶ取り出し方は $(k+1)^3$ 通りである。このうち j が出ないものは、残り k 個から 3 回選ぶので k^3 通りである。同様に $j+k$ が出ないものも k^3 通りである。両端とも出ないものは、中央の $k-1$ 個から 3 回選ぶので $(k-1)^3$ 通りである。

包除原理より、求める場合の数は $(k+1)^3 - 2k^3 + (k-1)^3$ であり、展開すると $(k+1)^3 - 2k^3 + (k-1)^3 = 6k$ である。したがって確率は $\frac{6k}{n^3}$ である。

(3) $Y - X = s$ となるとき、最小値を j とすれば最大値は $j+s$ である。取りうる j は $1 \leq j \leq n-s$ を満たす整数であり、全部で $n-s$ 通りある。

固定した j については、(2) で $k=s$ とした場合に等しいので、その確率は $\frac{6s}{n^3}$ である。これらは最小値 X の値が異なるため互いに重ならない。したがって $P(s) = (n-s) \frac{6s}{n^3}$ であり、 $P(s) = \frac{6s(n-s)}{n^3}$ である。

(4) n は偶数である。 $P(s)$ を最大にするには、定数 $6/n^3$ を除いて $s(n-s)$ を最大にすればよい。これは $s(n-s) = -\left(s - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}$ であるから、 $s = n/2$ のとき最大になる。 n は偶数なので $n/2$ は整数であり、また $n \geq 2$ だから $1 \leq \frac{n}{2} \leq n-1$ を満たす。よって $s = \frac{n}{2}$ である。

▶ 解法 2 (出現値の種類による直接計数)

【方針】

(2) で包除原理を使わず、3 回の結果に両端だけが現れる場合と、両端に加えて内部の値が 1 つ現れる場合に分ける。後者では 3 回の結果が相異なるため並べ方は 6 通りである。この直接計数を幅 s の区間へ適用して (3) を求め、平方完成で (4) を処理する。

【解答】

(1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ であることは、3 回の結果がすべて

$$j, j+1, \dots, j+k$$

の $k+1$ 個の値から選ばれることと同値である。復元抽出なので、求める確率は

$$\frac{(k+1)^3}{n^3}$$

である。

(2) $X = j$, $Y = j+k$ となる結果を、実際に現れる値の種類で分けて数える。

両端 j , $j+k$ だけが現れる場合は、各回に 2 通りの選択がある 2^3 通りから、3 回とも同じ端点になる 2 通りを除けばよい。したがって

$$2^3 - 2 = 6$$

通りである。

両端以外の値も現れる場合、試行は 3 回しかないので、現れる値は

$$j, \quad q, \quad j+k$$

の 3 種類であり、 q は $j+1, \dots, j+k-1$ の $k-1$ 通りである。各 q について 3 つの相異なる値の並べ方は

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

通りだから、この場合は $6(k-1)$ 通りとなる。

以上より条件を満たす順序つき結果は

$$6 + 6(k-1) = 6k$$

通りであり、確率は

$$\frac{6k}{n^3}$$

である。

(3) $Y - X = s$ のとき、 $X = j$ とおけば $Y = j+s$ である。左端 j は

$$1, 2, \dots, n-s$$

の $n-s$ 通りをとり、各 j に対する順序つき結果は (2) で $k=s$ とした $6s$ 通りである。したがって

$$P(s) = \frac{6s(n-s)}{n^3}.$$

(4)

$$s(n-s) = -\left(s - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}$$

である。 n は偶数なので $n/2$ は許される整数であり、 $1 \leq n/2 \leq n-1$ も満たす。したがって $P(s)$ を最大にするのは

$$s = \frac{n}{2}$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 14 分。復元抽出なので全事象を n^3 として順序つきで数えるのが基本である。(2) では端点 j と $j+k$ を少なくとも 1 回ずつ含めるため、包除原理の $(k+1)^3 - 2k^3 + (k-1)^3$ を丁寧に説明したい。(3) は左端 j が $n-s$ 通りあること、(4) は n が偶数だから頂点 $n/2$ が許されることが採点上の確認点である。

【第 4 問】

m, p を 3 以上の奇数とし、 m は p で割り切れないとする。

- (1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
- (2) $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) $(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。
- (4) r を正の整数とし、 $s = 3^{r-1}m$ とする。 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

【方針】

(1) は文系と同じく二項定理で x^2 の係数を読む。(2) は $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ と奇数性で示す。(3) は $(p-1)^m = (-1+p)^m$ を二項展開し、定数項が $+1$ と打ち消し合った後の一次項が mp であることを見る。 m は p で割り切れないので、全体は p では割れるが p^2 では割れない。(4) は $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$ を使う帰納法で、 $X+1$ が 3^r 、後ろの因数がさらに 3 で割れることを示す。

【解答】

(1) 二項定理より $(x-1)^{101} = \sum_{k=0}^{101} {}_{101}C_k x^k (-1)^{101-k}$ である。 x^2 の係数は $k=2$ の項から ${}_{101}C_2 (-1)^{99} = -\frac{101 \cdot 100}{2} = -5050$ である。したがって -5050 である。

(2) $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ であり、 m は奇数である。よって $(p-1)^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 = -1 + 1 = 0 \pmod{p}$ である。したがって $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れる。

(3) 二項定理より $(p-1)^m + 1 = (-1+p)^m + 1$ である。展開すると、定数項は $(-1)^m = -1$ であり、最後の $+1$ と打ち消し合う。一次項は ${}_m C_1 (-1)^{m-1} p = mp$ である。二次以上の項はすべて p^2 で割り切れるので、ある整数 M を用いて $(p-1)^m + 1 = mp + p^2 M = p(m + pM)$ と書ける。

仮定より m は p で割り切れない。したがって $m + pM$ も p で割り切れない。よって $p(m + pM)$ は p では割り切れるが、 p^2 では割り切れない。すなわち $(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないである。

(4) r に関する数学的帰納法で示す。 $r=1$ のときは $s=m$ であり、(2) で $p=3$ とすれば $2^m + 1 = (3-1)^m + 1$ は 3 で割り切れる。よって成り立つ。

次に、ある r について $2^{3^{r-1}m} + 1$ が 3^r で割り切れると仮定する。 $X = 2^{3^{r-1}m}$ とおくと $X+1 \equiv 0 \pmod{3^r}$ であり、特に $X \equiv -1 \pmod{3}$ である。

次の段階では $2^{3^r m} + 1 = X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$ である。第 1 因数 $X+1$ は 3^r で割り切れる。また $X^2 - X + 1 \equiv (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$ であるから、第 2 因数は 3 で割り切れる。したがって $X^3 + 1$ は 3^{r+1} で割り切れる。

以上より、数学的帰納法により $2^s + 1 = 2^{3^{r-1}m} + 1$ は 3^r で割り切れる が成り立つ。

【総評】 難度 6、目安時間 18 分。文系第 3 問に p^2 で割り切れない判定が加わった整数問題である。(3) では $(-1+p)^m$ の一次項が mp で、二次以上がすべて p^2 の倍数になることを明記するのが核心である。 m が p で割り切れないという条件は、まさに $m + pM$ が p で割り切れないことに使う。(4) は $X+1$ と $X^2 - X + 1$ の 2 因数がそれぞれ 3^r と 3 を供給する構造をはっきり書けばよい。