

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2013 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

3人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次のジャンケンを行い（アイコの場合は誰も脱落しない），勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n ，3人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1 ， q_1 を求めよ。
- (2) p_n ， q_n がみたす漸化式を導き， p_n ， q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

第 2 問

$x > 0$ とし, $f(x) = \log x^{100}$ とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

(2) 実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。

第 3 問

k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする。 ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める。

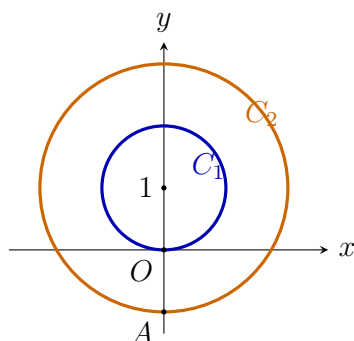
$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。
- (3) p が 3 以上の素数のとき, $S_k(p-1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, p-2$) は p の倍数であることを示せ。

第 4 問

半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円板 C_2 に貼り付けられており、2 つの円盤の中心は一致する。 C_2 の周上にある定点を A とする。図のように、時刻 $t = 0$ において C_1 は $O(0, 0)$ で x 軸に接し、 A は座標 $(0, -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり、 C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t, 1)$ にあるように転がるとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。



- (1) 時刻 t における A の座標を $(x(t), y(t))$ で表す。 $(x(t), y(t))$ を求めよ。
- (2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ、 $x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるとき
の A の座標を全て求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)