

名古屋大学 2013 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

3 人でジャンケンをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し、残った人で次のジャンケンを行い（アイコの場合は誰も脱落しない）、勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め、ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n 、3 人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1, q_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き、 p_n, q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

▶ 解法 1（状態の漸化式）

【方針】

残っている人数を「3 人」「2 人」「終了」の 3 状態に分ける。まず 3 人で 1 回行う 27 通りを数え、3 人のまま、2 人になる、1 人に決まる確率がいずれも $\frac{1}{3}$ であることを確認する。そこから p_n, q_n の漸化式を立て、 $3^n p_n$ に直して一般項を求める。最後は $n - 1$ 回目の各状態から、次の 1 回で終了する確率を足し合わせる。

【解答】

(1) 3 人がそれぞれ独立に 3 種類の手を出すので、1 回の出方は全部で

$$3^3 = 27 \text{通り}$$

である。

3 人のままであるのは、全員が同じ手を出す 3 通りと、3 人がグー・チョキ・パーを 1 つずつ出す 6 通りである。よって、その確率は

$$\frac{3+6}{27} = \frac{1}{3}$$

である。

2 人が残るには、2 人が同じ勝つ手を出し、残る 1 人がそれに負ける手を出せばよい。勝つ手の選び方が 3 通り、負ける人の選び方が 3 通りあるから、その確率は

$$\frac{3 \cdot 3}{27} = \frac{1}{3}$$

である。したがって

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \frac{1}{3}.$$

(2) 3 人の状態から次も 3 人である確率、3 人から 2 人になる確率は、ともに $\frac{1}{3}$ である。また、2 人の状態でアイコとなり、次も 2 人である確率は $\frac{1}{3}$ である。よって

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \\ q_{n+1} &= \frac{1}{3}q_n. \end{aligned} \tag{1}$$

$q_1 = \frac{1}{3}$ だから

$$q_n = \frac{1}{3^n}.$$

次に

$$r_n = 3^n p_n$$

とおく。(1) の第 1 式を用いると

$$3^{n+1} p_{n+1} = 3^n p_n + 3^n q_n$$

であり、 $3^n q_n = 1$ なので

$$r_{n+1} = r_n + 1.$$

初期値は $r_1 = 3p_1 = 1$ であるから $r_n = n$ となる。したがって

$$p_n = \frac{n}{3^n}, \quad q_n = \frac{1}{3^n}.$$

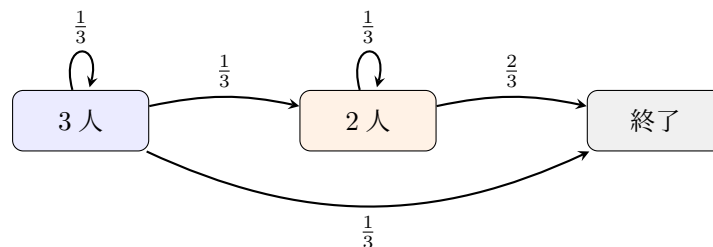
(3) $n \geq 2$ とする。 $n-1$ 回目終了時に 2 人が残っていれば、次の 1 回で勝敗がつく確率は $\frac{2}{3}$ である。3 人が残っていれば、次の 1 回で 1 人だけが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ である。ゆえに、ちょうど n 回目で 1 人に決まる確率は

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} q_{n-1} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \frac{2n-1}{3^n}. \end{aligned}$$

$n=1$ のときも、3 人から 1 人に決まる確率は $\frac{1}{3}$ であり、この式の値と一致する。よって求める確率は

$$\frac{2n-1}{3^n}$$

である。



状態遷移を図にすると、漸化式では「どの状態から入ってくるか」を足し合わせればよいことが見える。

▶ 解法 2 (状態が変わる回を直接数える)

【方針】

漸化式を解かず、 n 回の間に状態が変わる時刻を直接数える。3 人のまま n 回続く確率から q_n を求める。2 人が残るには、3 人から 2 人への移行がちょうど 1 回だけ起こるので、その回を j 回目として $j = 1, \dots, n$ を足す。終了時刻の確率は、 $n-1$ 回終了時点で未終了である確率と、 n 回終了時点で未終了である確率との差で求める。

【解答】

(1) 3 人で 1 回行ったとき、3 人のまま、2 人になる、1 人に決まる出方は、それぞれ 9 通りずつである。したがって

$$p_1 = q_1 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

(2) n 回終了時にも 3 人が残るには、毎回 3 人のままでなければならない。各回の確率は $\frac{1}{3}$ だから

$$q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}.$$

次に、 n 回終了時に 2 人が残るとする。3 人から 2 人になるのが j 回目であれば、

$$\underbrace{\text{最初の } j-1 \text{ 回は 3 人のまま}}_{(1/3)^{j-1}}, \quad \underbrace{j \text{ 回目に 2 人になる}}_{1/3}, \quad \underbrace{\text{残り } n-j \text{ 回は 2 人のまま}}_{(1/3)^{n-j}}$$

である。その確率は、 j によらず

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} = \frac{1}{3^n}$$

となる。 $j = 1, 2, \dots, n$ の n 通りは互いに重ならないので

$$p_n = \frac{n}{3^n}.$$

この数え上げから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \\ q_{n+1} &= \frac{1}{3}q_n \end{aligned}$$

も確認できる。

(3) n 回終了時点でまだ勝者が決まっていない確率を s_n とすると

$$s_n = p_n + q_n = \frac{n+1}{3^n}.$$

また $s_0 = 1$ とする。したがって、ちょうど n 回目で終了する確率は

$$\begin{aligned} s_{n-1} - s_n &= \frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n} \\ &= \frac{2n-1}{3^n}. \end{aligned}$$

これは $n = 1$ の場合も含む。

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。3 人ジャンケンの 27 通りを、3 人のまま・2 人になる・1 人に決まる、の 9 通りずつに正しく分けることが出発点である。漸化式では p_{n+1} に 3 人状態からの流入 $\frac{1}{3}q_n$ を加えること、 $3^n p_n$ に直した後の増加分が 1 になることが採点上の要点である。直接数える解法では、3 人から 2 人へ移る回が一度だけであることを使う。最後は $n = 1$ を別に確認するか、未終了確率の差を用いて同じ式に含まれることを示すと答案が閉じる。

【第 2 問】

$x > 0$ とし、 $f(x) = \log x^{100}$ とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

(2) 実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。

【方針】

$f(x) = 100 \log x$ とし、対数差を

$$\int_x^{x+1} \frac{dt}{t}$$

で表す。単調減少する $1/t$ を区間の両端値で挟めば (1) が得られる。(2) は、整数 $x \leq 99$ では増加量が 1 より大きく、 $x \geq 100$ では 1 より小さいことを使う。前半は値がすべて異なり、後半は整数部分が一度に 2 以上増えないため、両端の整数部分の間を飛ばさず通る。

【解答】

(1)

$$f(x) = \log x^{100} = 100 \log x$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= 100\{\log(x+1) - \log x\} \\ &= 100 \int_x^{x+1} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (1)$$

$x < t < x+1$ では

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{x}$$

である。区間の長さは 1 なので、積分すると

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x}.$$

(1) より

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}.$$

(2) まず整数 x が $1 \leq x \leq 99$ を満たすとき、(1) より

$$f(x+1) - f(x) > \frac{100}{x+1} \geq 1.$$

したがって

$$[f(1)], [f(2)], \dots, [f(100)]$$

はすべて異なる。後半との重複を避けるため、このうち

$$[f(1)], [f(2)], \dots, [f(99)]$$

の 99 個を前半として数える。

次に、整数 $x \geq 100$ では

$$0 < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x} \leq 1. \quad (2)$$

よって整数部分 $[f(x)]$ は減少せず、隣り合う 2 項の間で 2 以上増えることもない。したがって

$$[f(100)], [f(101)], \dots, [f(1000)]$$

には、最初の整数部分から最後の整数部分までのすべての整数が現れる。

指定された $\log 10 = 2.3026$ を用いると

$$\begin{aligned} f(100) &= 200 \log 10 = 460.52, \\ f(1000) &= 300 \log 10 = 690.78. \end{aligned}$$

したがって

$$[f(100)] = 460, \quad [f(1000)] = 690.$$

後半に現れる異なる整数部分は

$$460, 461, \dots, 690$$

であり、その個数は

$$690 - 460 + 1 = 231$$

である。以上より、求める個数は

$$99 + 231 = 330$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 16 分。(1) では $\log(x+1) - \log x$ を定積分に直し、減少関数 $1/t$ を开区間の両端値で厳密に挟む。(2) では増加量が 1 より大きい範囲と 1 より小さい範囲を $x = 99, 100$ の間で正確に分けることが核心である。「増加量が 1 未満」から直ちに個数を出すのではなく、整数部分が非減少で一度に 2 以上増えないため、460 から 690 までを飛ばさず通ると説明する。前半を 99 個、後半を $x = 100$ からの 231 個として重複なく数えるのが安全である。

【第 3 問】

k, m, n は整数とし、 $n \geq 1$ とする。 ${}_m C_k$ を二項係数として、 $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。
- (3) p が 3 以上の素数のとき、 $S_k(p-1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, p-2$) は p の倍数であることを示せ。

▶ 解法 1 (和の公式を用いる帰納法)

【方針】

(1)(2) は $S_k(n)$ を代入して二重和の順序を交換し、二項定理による望遠和にする。(3) では $n = p-1$ とした公式が p の倍数になることを利用する。 $S_1, \dots, S_{r-1}$ の倍数性を仮定し、 $m = r+1$ を代入すると、未知の最後の項は $(r+1)S_r(p-1)$ だけになる。 $2 \leq r+1 \leq p-1$ より $p \nmid (r+1)$ なので帰納法が閉じる。

【解答】

(1) $n = 1$ では $S_k(1) = 1$ だから

$$T_m(1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k = 2^m - 2.$$

$n = 2$ では $S_k(2) = 1 + 2^k$ なので

$$\begin{aligned} T_m(2) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (1 + 2^k) \\ &= (2^m - 2) + (3^m - 1 - 2^m) \\ &= 3^m - 3. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} T_m(n) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \sum_{j=1}^n j^k \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k j^k. \end{aligned}$$

二項定理より

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k j^k = (j+1)^m - j^m - 1.$$

したがって

$$\begin{aligned} T_m(n) &= \sum_{j=1}^n \{(j+1)^m - j^m - 1\} \\ &= (n+1)^m - n - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

(3) (1) に $n = p-1$ を代入すると

$$T_m(p-1) = p^m - p, \tag{2}$$

ゆえに、任意の $m \geq 2$ について $T_m(p-1)$ は p の倍数である。

$$1 \leq r \leq p-2$$

について、 $S_r(p-1)$ が p の倍数であることを r に関する帰納法で示す。

$r = 1$ のとき、(2) で $m = 2$ とすれば

$$T_2(p-1) = 2S_1(p-1).$$

$p \geq 3$ は素数なので $p \nmid 2$ である。したがって

$$p \mid S_1(p-1).$$

次に $2 \leq r \leq p-2$ とし、

$$p \mid S_1(p-1), \dots, \quad p \mid S_{r-1}(p-1)$$

を仮定する。(2) で $m = r+1$ とすると

$$T_{r+1}(p-1) = \sum_{k=1}^r {}_{r+1}C_k S_k(p-1).$$

左辺と $k = 1, \dots, r-1$ の各項は p の倍数である。したがって最後の項

$${}_{r+1}C_r S_r(p-1) = (r+1)S_r(p-1)$$

も p の倍数である。ここで

$$2 \leq r+1 \leq p-1$$

だから $p \nmid (r+1)$ である。よって

$$p \mid S_r(p-1).$$

以上の帰納法により

$$S_k(p-1) \quad (k = 1, 2, \dots, p-2)$$

はすべて p の倍数である。

▶ 解法 2 (非零剰余の並べ替え)

【方針】

(3) だけを別の見方で示す。法 p で $x^k - 1$ の根は高々 k 個なので、 $1, \dots, p-1$ の中に $c^k \not\equiv 1 \pmod{p}$ となる c がある。 $c, 2c, \dots, (p-1)c$ の剰余は非零剰余全体の並べ替えであるため、べき和は c^k 倍しても変わらない。差を取れば結論が出る。

【解答】

(3) の別解

$$1 \leq k \leq p-2$$

を固定する。

まず、 $1, 2, \dots, p-1$ の中に

$$c^k \not\equiv 1 \pmod{p} \tag{1}$$

となる c が存在することを示す。法 p では、0 でない k 次多項式がもつ相異なる根は高々 k 個である。これは、根を 1 つ見つけるたびに因数定理で 1 次因子を取り出すことを繰り返せば分かる。

もしすべての非零剰余 $c = 1, 2, \dots, p-1$ が $c^k \equiv 1 \pmod{p}$ を満たすなら、 k 次多項式 $x^k - 1$ は $p-1$ 個の相異なる根をもつ。しかし

$$k \leq p-2 < p-1$$

なので矛盾する。よって (1) を満たす c が存在する。

p は素数で $p \nmid c$ だから

$$c, 2c, \dots, (p-1)c$$

を p で割った余りは、順序を除いて

$$1, 2, \dots, p-1$$

と一致する。したがって

$$\begin{aligned} S_k(p-1) &\equiv c^k + (2c)^k + \dots + \{(p-1)c\}^k \\ &\equiv c^k S_k(p-1) \pmod{p}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$(c^k - 1)S_k(p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

(1) より $p \nmid (c^k - 1)$ なので

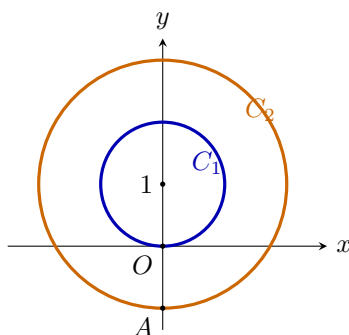
$$S_k(p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

これは $k = 1, 2, \dots, p-2$ のすべてについて成り立つ。

【総評】 難度 7、目安時間 24 分。主解の核心は、前半で得た $T_m(n)$ の式を後半へ再利用し、 $m = r + 1$ によって未知の S_r だけを残すことにある。帰納法では範囲 $2 \leq r + 1 \leq p - 1$ を書き、素数 p が係数 $r + 1$ を割らないことを明示する。別解は非零剰余の置換を使う実質的に異なる方法であるが、「 $x^k - 1$ の根が高々 k 個」という補題を法 p の因数定理から説明しないと飛躍になる。主解は出題の流れ、別解は合同式の構造を見せる答案である。

【第 4 問】

半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円板 C_2 に貼り付けられており、2 つの円盤の中心は一致する。 C_2 の周上にある定点を A とする。図のように、時刻 $t = 0$ において C_1 は $O(0, 0)$ で x 軸に接し、 A は座標 $(0, -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり、 C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t, 1)$ にあるように転がるとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。



- (1) 時刻 t における A の座標を $(x(t), y(t))$ で表す。 $(x(t), y(t))$ を求めよ。
- (2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ、 $x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

【方針】

中心は $(t, 1)$ にあり、すべらず右へ距離 t 進むので、半径 1 の円盤は時計回りに角 t 回転する。初期ベクトル $(0, -2)$ を回して A の媒介変数表示を得る。(2) は $x'(t), y'(t)$ の符号を調べ、局所的な増減だけでなく端点値も比較して全体の最大・最小を確定する。(3) では 2 つの x 軸交点間で $y \geq 0$ 、かつ $x'(t) = y(t) \geq 0$ となるため、面積を

$$\int y \, dx$$

で計算できる。

【解答】

(1) 時刻 t における 2 円盤の中心は $(t, 1)$ である。時刻 0 で、中心から A へのベクトルは

$$(0, -2)$$

である。半径 1 の円盤が右へ距離 t だけすべらずに転がるので、円盤全体は時計回りに角 t だけ回転する。このベクトルは

$$(-2 \sin t, -2 \cos t)$$

に移る。したがって

$$x(t) = t - 2 \sin t, \quad y(t) = 1 - 2 \cos t.$$

(2)

$$x'(t) = 1 - 2 \cos t, \quad y'(t) = 2 \sin t.$$

まず $x'(t) = 0$ となるのは

$$t = \frac{\pi}{3}, \quad t = \frac{5\pi}{3}$$

である。 $x'(t)$ の符号は

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$x'(t)$	—	0	+	0
				—

となる。候補点と端点での値は

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, \\ x\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}, \\ x(2\pi) &= 2\pi. \end{aligned}$$

$\pi/3 < \sqrt{3}$ より第 2 の値は負であり、 $\sqrt{3} > \pi/3$ より第 3 の値は 2π より大きい。よって $x(t)$ の最小・最大を与える点はそれぞれ

$$\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 0\right), \quad \left(\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}, 0\right).$$

次に、 $0 < t < \pi$ では $y'(t) > 0$ 、 $\pi < t < 2\pi$ では $y'(t) < 0$ である。したがって $y(t)$ は $t = \pi$ で最大、端点 $t = 0, 2\pi$ で最小となる。対応する点は

$$(\pi, 3), \quad (0, -1), \quad (2\pi, -1).$$

以上が、 $x(t)$ または $y(t)$ が最大値・最小値をとるときの点のすべてである。

(3) x 軸との交点は

$$y(t) = 1 - 2\cos t = 0$$

から

$$t = \frac{\pi}{3}, \quad t = \frac{5\pi}{3}$$

である。この区間では

$$y(t) \geq 0, \quad x'(t) = 1 - 2\cos t = y(t) \geq 0$$

なので、曲線は x 方向に戻らず、曲線と x 軸の間の面積を通常の向きで積分できる。面積を $\mathcal{A}$ とすると

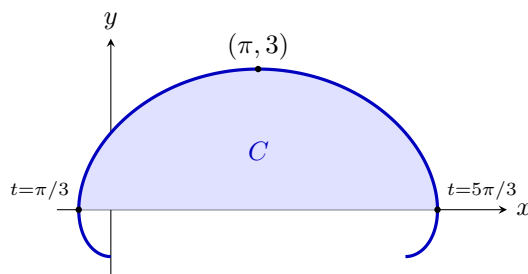
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int y \, dx \\ &= \int_{\pi/3}^{5\pi/3} y(t)x'(t) \, dt \\ &= \int_{\pi/3}^{5\pi/3} (1 - 2\cos t)^2 \, dt. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで

$$(1 - 2\cos t)^2 = 3 - 4\cos t + 2\cos 2t$$

だから

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [3t - 4\sin t + \sin 2t]_{\pi/3}^{5\pi/3} \\ &= 4\pi + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= 4\pi + 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$



色を付けた中央の部分が、曲線 C と x 軸で囲まれる図形である。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。媒介変数表示では、右向きの転がりが時計回りであることと、中心から A までの距離が外側円盤の半径 2 であることを確認する。(2) は端点 $x(0), x(2\pi)$ も比較して全区間での最大・最小を確定する。(3) は $x'(t) = y(t)$ に注目し、 $\pi/3 \leq t \leq 5\pi/3$ で両者が非負だから

$$\int y \, dx$$

が求める面積になることまで示す。原問題の初期配置図と解答の曲線図は区別して掲載した。