

名古屋大学 2016 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-2, 4)$, $B(b, b^2)$ をとる。ただし $b > -2$ とする。このとき、次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y = x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-2 < t < b$) で、 $\angle ATB$ が直角になるものが存在する。

▶ 解法 1

【方針】

点 $T(t, t^2)$ で直角になる条件を内積で表し、端点 A, B に対応する因子を除いて 2 次式 $q(t) = t^2 + (b-2)t + 1 - 2b$ の根の位置を調べる。判別式から $b \geq 0$ が必要である。さらに小さい b では 2 次式が区間 $(-2, b)$ で正のままなので、境界 $t = b$ で $q(b) = 0$ となる値を調べる。开区間なので等号は入らず、その後は符号変化により根の存在を示す。

【解答】

点 $T(t, t^2)$ において $\angle ATB$ が直角である条件は $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 0$ である。ここで

$$\overrightarrow{TA} = (-2-t, 4-t^2), \quad \overrightarrow{TB} = (b-t, b^2-t^2)$$

だから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} &= (-2-t)(b-t) + (4-t^2)(b^2-t^2) \\ &= (t-b)(t+2)\{t^2 + (b-2)t + 1 - 2b\} \end{aligned}$$

である。

条件 $-2 < t < b$ のもとでは、 $t+2 > 0$, $t-b < 0$ であり、この 2 つは 0 にならない。したがって $q(t) = t^2 + (b-2)t + 1 - 2b$ が $(-2, b)$ に実数解をもつ条件を求めればよい。

まず判別式は $D = (b-2)^2 - 4(1-2b) = b(b+4)$ である。 $b > -2$ のもとで $-2 < b < 0$ なら $D < 0$ となり、根は存在しない。よって必要条件として $b \geq 0$ を得る。

次に $0 \leq b \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときを調べる。この範囲では $q(b) = 2b^2 - 4b + 1 \geq 0$ である。また $-2 < t < b$ では $q'(t) = 2t + b - 2 < 2b + b - 2 = 3b - 2 < 0$ が成り立つ。したがって $q(t)$ は $(-2, b)$ で減少しており、 $t < b$ なら $q(t) > q(b) \geq 0$ である。よってこの範囲では根は存在しない。境界 $b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ では根が $t = b$ に来るだけなので、开区間条件を満たさない。

最後に $b > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ なら、実際に根が存在することを示す。 $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ とおく。 $\alpha < b < \frac{1}{2}$ のときは $q(0) = 1 - 2b > 0$, $q(b) = 2b^2 - 4b + 1 < 0$ であるから、 $0 < t < b$ に根がある。 $\frac{1}{2} \leq b < \frac{9}{4}$ のときは $q(-2) = 9 - 4b > 0$, $q(0) = 1 - 2b \leq 0$ であるから、 $-2 < t \leq 0$ に根がある。 $q(0) = 0$ となる $b = 1/2$ でも、 $t = 0$ は $(-2, b)$ に含まれる。 $b \geq \frac{9}{4}$ のときは $q(0) = 1 - 2b < 0$, $q(b) = 2b^2 - 4b + 1 > 0$ であるから、 $0 < t < b$ に根がある。

以上より、求める b の範囲は $b > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

端点以外の交点条件を b について解き, $b = (t-1)^2/(2-t)$ と表す。未知量の役割を逆転し, $-2 < t < b$ を満たす t の範囲を先に求めてから, 関数 $B(t) = (t-1)^2/(2-t)$ の値域を取る。

【解答】

内積条件を因数分解すると, 端点 $t = -2, b$ 以外の直角点は

$$t^2 + (b-2)t + 1 - 2b = 0$$

を満たす。この式を b について整理すると

$$b = \frac{(t-1)^2}{2-t} =: B(t).$$

もし $t \geq 2$ なら右辺は 0 以下であり, $t < b$ と両立しない。したがって $-2 < t < 2$ だけを考えればよい。

この範囲では $2-t > 0$ だから, 条件 $t < b = B(t)$ は

$$t(2-t) < (t-1)^2$$

すなわち

$$2t^2 - 4t + 1 > 0$$

と同値である。 $\alpha = 1 - \sqrt{2}/2$, $\beta = 1 + \sqrt{2}/2$ とおくと, 許される t は

$$-2 < t < \alpha \quad \text{または} \quad \beta < t < 2.$$

ここで

$$B'(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{(2-t)^2}.$$

したがって B は $(-2, \alpha)$ で減少し, $(\beta, 2)$ で増加する。また

$$B(-2) = \frac{9}{4}, \quad B(\alpha) = \alpha, \quad B(\beta) = \beta, \quad \lim_{t \rightarrow 2-} B(t) = +\infty.$$

端点はいずれも許されないで, 2 つの区間での値域はそれぞれ

$$\alpha < b < \frac{9}{4}, \quad \beta < b < +\infty.$$

$\beta < 9/4$ であるから, これらの和集合は

$$b > \alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

よって求める範囲は $b > 1 - \sqrt{2}/2$ である。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 18 分。文系第 1 問と同じ内積設定だが, 根が区間に入る条件が判別式だけでは終わらない点が難しい。特に $b = 1 - \sqrt{2}/2$ では根が $t = b$ という端点に一致するので除外する。答案では, 存在しない範囲を単調性で示し, 存在する範囲を符号変化で示すと説得力が出る。別解の円周角の見方を使っても, 最後の开区間判定は省略できない。

【第 2 問】

2つの円 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ と $D: (x+2)^2 + y^2 = 7^2$ を考える。また原点を $O(0, 0)$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 円 C 上に、 y 座標が正であるような点 P をとり、 x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき、点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。
 - (2) (1) でとった点 P を固定したまま、点 Q が円 D 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。
 - (3) 点 P が円 C 上を動き、点 Q が円 D 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。
- ただし (2), (3) においては、3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは、 $\triangle OPQ$ の面積は 0 であるとする。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は原点から角 θ の半直線上に $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおき、円 C へ代入する。(2) は P を固定し、三角形の面積を「底辺 $OP \times$ 直線 OP から Q までの距離」の半分として考える。円 D 上でこの距離が最大になる点は、中心から直線 OP に垂直な方向へ半径分進んだ点である。(3) は $x = \sin \theta$ とおき、 $\sqrt{1-x^2}(7+2x)$ を $0 < x < 1$ で最大化する。

【解答】

(1) 点 P は原点から見て角 θ の方向にあるので、 $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおける。 P は円 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 上にあるから、 $(r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1$ である。整理すると $r^2 - 2r \cos \theta = 0$ となる。 $P \neq O$ であり、また y 座標が正なので $0 < \theta < \pi/2$, $r > 0$ である。したがって $r = 2 \cos \theta$ であり、 $P = (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta)$, $OP = 2 \cos \theta$ である。

(2) P を固定する。直線 OP の方向の単位ベクトルは $(\cos \theta, \sin \theta)$ であり、これに垂直な単位ベクトルの一つは $\mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ である。点 Q から直線 OP までの距離は、 Q の $\mathbf{n}$ 方向成分の絶対値で決まる。

円 D の中心を $M = (-2, 0)$ とすると、 $M \cdot \mathbf{n} = 2 \sin \theta$ である。円 D の半径は 7 だから、 $\mathbf{n}$ 方向の成分を最大にする点は $Q = M + 7\mathbf{n}$ である。このとき、反対向きに進むと距離は $|2 \sin \theta - 7| = 7 - 2 \sin \theta$ であり、 $7 + 2 \sin \theta$ より小さい。したがって面積を最大にする点は $Q = (-2, 0) + 7(-\sin \theta, \cos \theta) = (-2 - 7 \sin \theta, 7 \cos \theta)$ である。

(3) (2) での最大距離は $7 + 2 \sin \theta$ である。したがって、 P を固定したときの最大面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OP \cdot (7 + 2 \sin \theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta (7 + 2 \sin \theta) = \cos \theta (7 + 2 \sin \theta)$$

である。

ここで $x = \sin \theta$ とおくと、 $0 < x < 1$, $\cos \theta = \sqrt{1-x^2}$ であるから、 $F(x) = \sqrt{1-x^2}(7+2x)$ を最大にすればよい。 $F(x) > 0$ なので、微分して $F'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}(7+2x) + 2\sqrt{1-x^2}$ である。 $F'(x) = 0$ は $2(1-x^2) = x(7+2x)$ すなわち $4x^2 + 7x - 2 = 0$ に等しい。これを解くと $x = \frac{1}{4}$, $x = -2$ であり、 $0 < x < 1$ を満たすのは $x = 1/4$ だけである。

また、 $x \rightarrow 0+$ では $F(x) \rightarrow 7$, $x \rightarrow 1-$ では $F(x) \rightarrow 0$ であり、 $x = 1/4$ で増加から減少に変わるので、ここで最大となる。よって最大値は

$$F\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} \left(7 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\sqrt{15}}{8}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

円 C を中心角で、円 D を偏角で媒介表示し、三角形の面積を行列式で直接表す。 Q についての最大化は正弦の最大値に帰着させ、最後の P についての最大化は微分を使わず、最大候補との差を $(4x-1)^2$ で因数分解して証明する。

【解答】

(1) 円 C 上半分の点を

$$P = (1 + \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (0 < \varphi < \pi)$$

とおく。半角公式により

$$P = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

したがって $\theta = \varphi/2$ であり、

$$P = (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta), \quad OP = 2 \cos \theta.$$

(2) 円 D 上の点を

$$Q = (-2 + 7 \cos \psi, 7 \sin \psi)$$

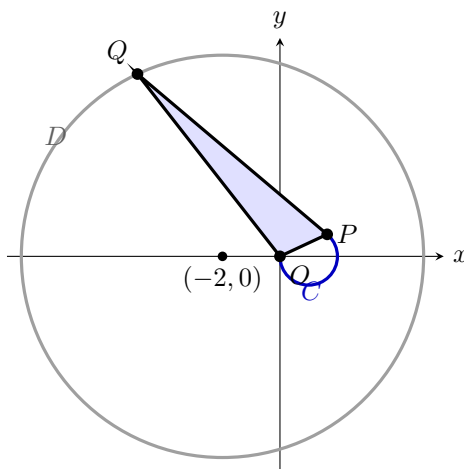
とおく。 $c = \cos \theta, s = \sin \theta$ と略記すると $P = 2c(c, s)$ だから、

$$\begin{aligned} \det(P, Q) &= 2c\{7c \sin \psi - s(-2 + 7 \cos \psi)\} \\ &= 2c\{2s + 7 \sin(\psi - \theta)\}. \end{aligned}$$

$0 < s < 1$ なので絶対値が最大になるのは $\sin(\psi - \theta) = 1$ のときである。よって

$$Q = (-2 - 7 \sin \theta, 7 \cos \theta)$$

であり、このとき直線 OP から Q までの距離は $7 + 2 \sin \theta$ となる。



(3) 最大面積を F とすると

$$F = \cos \theta (7 + 2 \sin \theta).$$

$x = \sin \theta$ とおけば $0 < x < 1$ であり、 $F^2 = (1 - x^2)(7 + 2x)^2$ である。ここで直接計算すると

$$\frac{3375}{64} - F^2 = \frac{(4x-1)^2(16x^2 + 120x + 239)}{64} \geq 0.$$

右辺の第 2 因子は $0 < x < 1$ で正だから、等号は $x = 1/4$ のときに限る。したがって

$$F_{\max} = \sqrt{\frac{3375}{64}} = \frac{15\sqrt{15}}{8}.$$

このとき $\sin \theta = 1/4$ であり、実際に円 C 上の点 P として実現する。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 18 分。(1) で $0 < \theta < \pi/2$ を確認しておく、 $r = 2 \cos \theta$ や $\cos \theta > 0$ を安心して使える。(2) は点 Q を直接微分で追うより、固定した底辺 OP からの距離最大と見るのが速い。反対側の点では距離が $7 - 2 \sin \theta$ になり最大でない点も説明しておくといよい。(3) の最大化では端に最大がないことと、 $x = 1/4$ だけが範囲内の臨界点であることを確認する。

【第 3 問】

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき, 袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ, 次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる, という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個, B に白玉が 2 個入った状態から始め, この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。このとき, 次の間に答えよ。

- (1) $k = 0, 1, 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。
 (2) $k = 0, 1, 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

袋 B に入っている赤玉の個数 $k = 0, 1, 2$ を状態として, 1 回の操作による遷移確率を作る。現在の状態が k なら, 最初に B から赤を出すか白を出すか, 次に A から赤を戻すか白を戻すかで $k-1, k, k+1$ への確率が求まる。遷移表を見ると, 次に状態 1 になる確率は現在の状態によらず $2/3$ であり, さらに $P_n(0) - P_n(2)$ だけが比 $1/3$ で変化する。和と差から $P_n(0), P_n(2)$ を決める。

【解答】

(1) 初めは袋 A に赤玉 2 個, 袋 B に白玉 2 個が入っている。1 回目の操作では, まず袋 B から白玉を 1 個取り出して袋 A に入れるしかない。この時点で袋 A には赤玉 2 個, 白玉 1 個が入っている。

次に袋 A から袋 B へ移す玉が赤玉である確率は $2/3$, 白玉である確率は $1/3$ である。赤玉を移せば袋 B の赤玉は 1 個, 白玉を移せば袋 B の赤玉は 0 個である。したがって $P_1(0) = \frac{1}{3}$, $P_1(1) = \frac{2}{3}$, $P_1(2) = 0$ である。

(2) 袋 B に赤玉が k 個入っている状態を考える。このとき袋 B には赤玉 k 個, 白玉 $2-k$ 個があり, 袋 A には赤玉 $2-k$ 個, 白玉 k 個がある。

まず袋 B から赤玉を取り出す確率は $k/2$ である。この場合, 袋 B の赤玉は一時的に $k-1$ 個となり, 袋 A には赤玉 $3-k$ 個, 白玉 k 個が入る。続いて袋 A から白玉を戻せば袋 B の赤玉は $k-1$ 個, 赤玉を戻せば k 個になる。したがって赤玉を先に取り出した場合の寄与は

$$k-1 \leadsto \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} = \frac{k^2}{6}, \quad k \leadsto \frac{k}{2} \cdot \frac{3-k}{3}$$

である。

一方, 袋 B から白玉を取り出す確率は $(2-k)/2$ である。この場合, 袋 A には赤玉 $2-k$ 個, 白玉 $k+1$ 個が入る。続いて赤玉を戻せば袋 B の赤玉は $k+1$ 個, 白玉を戻せば k 個になる。よって白玉を先に取り出した場合の寄与は

$$k+1 \leadsto \frac{2-k}{2} \cdot \frac{2-k}{3} = \frac{(2-k)^2}{6}, \quad k \leadsto \frac{2-k}{2} \cdot \frac{k+1}{3}$$

である。

以上より, 状態 k から $k-1, k, k+1$ へ移る確率はそれぞれ

$$\frac{k^2}{6}, \quad \frac{k(3-k) + (2-k)(k+1)}{6} = \frac{-k^2 + 2k + 1}{3}, \quad \frac{(2-k)^2}{6}$$

である。これを $k = 0, 1, 2$ について表にすると

	0	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

となる。行は現在の状態, 列は次の状態を表す。

この表から, どの状態から出発しても次に状態 1 になる確率は $2/3$ である。したがって $n \geq 1$ について $P_n(1) = \frac{2}{3}$ である。

次に状態 0 と状態 2 の差を見る。遷移表より

$$P_{n+1}(0) = \frac{1}{3}P_n(0) + \frac{1}{6}P_n(1),$$

$$P_{n+1}(2) = \frac{1}{6}P_n(1) + \frac{1}{3}P_n(2)$$

であるから、差をとると $P_{n+1}(0) - P_{n+1}(2) = \frac{1}{3}\{P_n(0) - P_n(2)\}$ となる。(1) より $P_1(0) - P_1(2) = \frac{1}{3}$ なので、 $P_n(0) - P_n(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。

また確率の総和は 1 で、 $P_n(1) = 2/3$ だから $P_n(0) + P_n(2) = \frac{1}{3}$ である。和と差を用いて

$$P_n(0) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}, \quad P_n(2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

を得る。

したがって

$$P_n(0) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}, \quad P_n(1) = \frac{2}{3}, \quad P_n(2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

3 状態の遷移表を作った後、状態 0 と 2 の差ではなく、 $u_n = P_n(0)$ だけの 1 次漸化式を作る。 $P_n(1) = 2/3$ が毎回一定であることを先に使えば、定常値 $1/6$ からのずれが毎回 $1/3$ 倍になる。最後に確率の総和から $P_n(2)$ を得る。

【解答】

(1) 最初の操作で B から A へ移るのは白玉である。その後 A には赤 2 個、白 1 個があるから、B へ赤を戻す確率は $2/3$ 、白を戻す確率は $1/3$ である。よって

$$P_1(0) = \frac{1}{3}, \quad P_1(1) = \frac{2}{3}, \quad P_1(2) = 0.$$

(2) 1 回の操作による遷移確率は

	0	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

である。どの行でも状態 1 へ移る確率が $2/3$ なので、すべての $n \geq 1$ について

$$P_n(1) = \frac{2}{3}.$$

ここで $u_n = P_n(0)$ とおく。遷移表より

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}P_n(1) = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{9}.$$

定常値 $1/6$ を引けば

$$u_{n+1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \left(u_n - \frac{1}{6} \right).$$

初期値 $u_1 = 1/3$ から

$$u_n - \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

したがって

$$P_n(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}.$$

また $P_n(0) + P_n(2) = 1/3$ なので

$$P_n(2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}.$$

以上で 3 つの確率が求まった。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 15 分。状態が 3 つしかないため、遷移表を丁寧に作れば一般項まで一直線に進める。最初に B から出す玉と、次に A から戻す玉の構成が変わるので、 k 個状態で A 側に赤玉が $2-k$ 個あることを明記すると計算ミスが減る。解法の核は、状態 1 への列がすべて $2/3$ でそろふことと、状態 0 と 2 の差が $1/3$ 倍になることを見抜く点である。

【第 4 問】

次の問に答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1) 次の条件 (＊) を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

(＊) 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解が c, d である。

2 次方程式 $x^2 + cx + d = 0$ の 2 つの解が e, f である。

2 次方程式 $x^2 + ex + f = 0$ の 2 つの解が a, b である。

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、次の条件 (＊＊) を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について、 a_n, b_n は整数であり、2 次方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ の 2 つの解が a_{n+1}, b_{n+1} である。

このとき、

(i) 正の整数 m で、 $|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots$ となるものが存在することを示せ。

(ii) 条件 (＊＊) を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の組をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

解と係数の関係を使い、6 つの整数や 2 つの数列を「次の組が現在の 2 次方程式の 2 根である」という関係に直す。(1) では $d = 0$ と $d \neq 0$ で分け、 $d \neq 0$ なら $ace = 1$ から a, c, e が ± 1 に限られることを利用して絞る。(2)(i) では $b_n = a_{n+1}b_{n+1}$ から、 $b_n \neq 0$ の範囲では $|b_n|$ が増加しないこと、また $b_{n+1} = 0$ なら $b_n = 0$ であることを使って、0 の現れ方と正整数列の単調性を分ける。(2)(ii) では $|b_n|$ が一定になった後进行分类し、 $|a_n| = 1$ から固定解 $(1, -2)$ か、 $b_n = 0$ の交代解に限られることを示す。

【解答】

(1) 解と係数の関係より、条件 (＊) は

$$c + d = -a, \quad cd = b, \quad e + f = -c, \quad ef = d, \quad a + b = -e, \quad ab = f$$

と書ける。

まず $d = 0$ の場合を考える。 $cd = b$ より $b = 0$ であり、 $ab = f$ より $f = 0$ である。また $c + d = -a$ より $c = -a$ 、 $a + b = -e$ より $e = -a$ である。一方、 $e + f = -c$ より $e = -c = a$ でもある。したがって $-a = a$ となり、 $a = 0$ である。よって $a = b = c = d = e = f = 0$ を得る。

次に $d \neq 0$ の場合を考える。 $b = cd$ と $f = ab$ から $f = ab = a(cd) = acd$ である。さらに $d = ef$ なので $d = eacd$ となる。 $d \neq 0$ だから両辺を d で割って $ace = 1$ を得る。 a, c, e はいずれも整数であるから、 $a, c, e \in \{1, -1\}$ である。

ここで $ace = 1$ より $e = ac$ である。また $c + d = -a$ から $d = -a - c$ であり、 $b = cd$ より $b = c(-a - c) = -ac - 1$ である。これを $a + b = -e$ へ代入すると $a + (-ac - 1) = -ac$ となるので、 $a = 1$ でなければならない。したがって $e = c$ 、 $d = -1 - c$ 、 $b = -c - 1$ である。

さらに $f = ab = b = -c - 1$ であり、 $e + f = -c$ に代入すると $c + (-c - 1) = -c$ であるから、 $c = 1$ である。よって $a = 1$ 、 $b = -2$ 、 $c = 1$ 、 $d = -2$ 、 $e = 1$ 、 $f = -2$ となる。

以上より、条件 (＊) を満たす整数の組は $(a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, -2, 1, -2, 1, -2)$ である。

(2)

(i) 条件 (＊＊) より、すべての正の整数 n について解と係数の関係から $a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n$ 、 $a_{n+1}b_{n+1} = b_n$ が成り立つ。

まず、 $b_{n+1} = 0$ なら、第二式より $b_n = a_{n+1}b_{n+1} = 0$ である。したがって、ある時点で b が 0 なら、それ以前の b もすべて 0 である。つまり、 $b_n = 0$ となる添字は、先頭から続く部分に限られるか、またはすべての添字である。

もし $b_n = 0$ がすべての n で成り立つなら、最初から $|b_1| = |b_2| = |b_3| = \dots = 0$ であり、主張は成り立つ。

そうでない場合、ある番号以後は $b_n \neq 0$ である。その範囲では $b_n = a_{n+1}b_{n+1}$ より、 b_{n+1} は b_n の整数の約数である。したがって $|b_{n+1}| \leq |b_n|$ が成り立つ。以後の $|b_n|$ は正の整数からなる単調非増加列であるから、いつか一定になる。よって、ある正の整数 m が存在して $|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots$ となる。

(2)(ii) (i) より、ある m 以後で $|b_n|$ は一定である。その一定値を M とする。

まず $M = 0$ の場合を考える。このとき十分大きい n で $b_n = 0$ である。上で示したように $b_{n+1} = 0$ なら $b_n = 0$ が従うので、後ろから戻って $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0$ である。すると第一式は $a_{n+1} = -a_n$ となる。よって、任意の整数 c を用いて $a_n = (-1)^{n-1}c$, $b_n = 0$ と表される。実際、このとき 2 次方程式 $x^2 + a_n x = x(x + a_n) = 0$ の 2 つの解は 0 と $-a_n = (-1)^n c$ であり、 $(a_{n+1}, b_{n+1}) = ((-1)^n c, 0)$ と一致する。

次に $M > 0$ の場合を考える。十分大きい n では $|b_n| = |b_{n+1}| = M$ であるから、第二式より $M = |b_n| = |a_{n+1}| |b_{n+1}| = |a_{n+1}| M$ となる。 $M > 0$ なので $|a_{n+1}| = 1$ である。したがって十分大きい n では、 a_n も a_{n+1} も ± 1 である。

このとき第一式から $b_{n+1} = -a_n - a_{n+1}$ である。 $b_{n+1} \neq 0$ だから、 a_n と a_{n+1} は同符号でなければならない。もし $a_n = a_{n+1} = 1$ なら $b_{n+1} = -2$, $b_n = a_{n+1} b_{n+1} = -2$ となり、状態は $(a_n, b_n) = (1, -2)$ で続く。

一方、 $a_n = a_{n+1} = -1$ なら $b_{n+1} = 2$ である。しかし次の段階でも同じ議論により a_{n+1} と a_{n+2} は同符号でなければならないので、 $a_{n+2} = -1$ となる。このとき $b_{n+2} = 2$, $b_{n+1} = a_{n+2} b_{n+2} = -2$ となり、 $b_{n+1} = 2$ に矛盾する。したがって負の符号の場合は起こらない。

よって十分大きい n で $(a_n, b_n) = (1, -2)$ である。さらに、もし $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (1, -2)$ なら $a_{n+1} + b_{n+1} = -1 = -a_n$, $a_{n+1} b_{n+1} = -2 = b_n$ より、直前も $(a_n, b_n) = (1, -2)$ である。これを後ろから繰り返すと、すべての n で $a_n = 1$, $b_n = -2$ となる。実際、 $x^2 + x - 2 = 0$ の 2 つの解は 1 と -2 なので、条件を満たす。

以上より、条件 (**) を満たす数列は $a_n = (-1)^{n-1}c$, $b_n = 0$ (c は整数) または $a_n = 1$, $b_n = -2$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) では 3 つの積の式をまとめて掛け、零の場合と非零の場合を対称的に処理する。非零なら $ace = 1$ となるので、符号 4 通りだけを調べればよい。(2) では $b_{n+1} | b_n$ による絶対値の安定化後、 $a_n = \pm 1$ を得る。負の候補は次の 2 次方程式の判別式が負になることで直ちに除外する。

【解答】

(1) 解と係数の関係から

$$c + d = -a, \quad cd = b, \quad e + f = -c, \quad ef = d, \quad a + b = -e, \quad ab = f.$$

まず b, d, f のいずれかが 0 なら、積の 3 式を順に用いて 3 つとも 0 になる。すると和の 3 式から $c = -a, e = -c, a = -e$ であり、 $a = -a$ となるので、全て 0 である。

次に $bdf \neq 0$ とする。積の 3 式を掛けると

$$bdf = (cd)(ef)(ab) = ace bdf$$

だから $ace = 1$ である。整数 a, c, e は ± 1 で、積が 1 となる符号は

$$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

の 4 通りである。和の式から

$$d = -a - c, \quad f = -c - e, \quad b = -e - a.$$

後ろ 3 通りではいずれか 1 つが 0 となり $bdf \neq 0$ に反する。したがって $a = c = e = 1$ だけが残る、 $b = d = f = -2$ となる。よって

$$(a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (1, -2, 1, -2, 1, -2).$$

(2)

(i) すべての n について

$$a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n, \quad a_{n+1} b_{n+1} = b_n.$$

$b_{n+1} = 0$ なら $b_n = 0$ であるから、 0 となる添字は先頭から連続する。全て 0 なら主張は明らかである。そうでなければ、ある添字以後は $b_n \neq 0$ であり、その範囲で b_{n+1} は b_n の約数である。よって正整数列 $|b_n|$ は単調非増加となり、有限回で一定になる。これで (i) が示された。

(2)(ii) 安定後の $|b_n|$ を M とする。 $M = 0$ なら、安定後の b_n は 0 であり、 $b_{n+1} = 0 \Rightarrow b_n = 0$ を後ろ向きに使って全ての b_n が 0 となる。このとき $a_{n+1} = -a_n$ なので

$$a_n = (-1)^{n-1}c, \quad b_n = 0 \quad (c \text{ は整数}).$$

$M > 0$ なら、十分大きい n で

$$M = |b_n| = |a_{n+1}| |b_{n+1}| = |a_{n+1}| M$$

より $|a_{n+1}| = 1$ である。したがって安定した範囲では $a_n, a_{n+1} \in \{1, -1\}$ であり、

$$b_{n+1} = -a_n - a_{n+1}.$$

$b_{n+1} \neq 0$ だから 2 つは同符号で、 $|b_{n+1}| = 2$ である。正の符号なら状態は $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (1, -2)$ となる。負の符号なら $(-1, 2)$ となるが、次の方程式は $x^2 - x + 2 = 0$ で判別式が -7 となり、整数解をもたない。よって負の符号は不可能である。

したがって十分先では $(a_n, b_n) = (1, -2)$ である。もし $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (1, -2)$ なら、上の和と積から直前も $(a_n, b_n) = (1, -2)$ と一意に決まるので、全ての n で同じである。

以上より求める数列は

$$a_n = (-1)^{n-1}c, \quad b_n = 0 \quad (c \in \mathbb{Z}),$$

または

$$a_n = 1, \quad b_n = -2$$

である。

【総評】 難度 8, 計算量 6。目安時間は 30 分。解と係数の関係を立てるだけでは終わらず、整数条件から割り切りと単調性を引き出す必要がある。(1) では $d \neq 0$ のときに $ace = 1$ まで落とせるかが勝負で、その後も $a = 1, c = 1$ を式で絞ると答案が締まる。(2) では $b_{n+1} = 0 \Rightarrow b_n = 0$ により 0 の出現が先頭側へしか戻らないこと、非零になった後は $|b_n|$ が正の整数の単調非増加列になることを分けて書く。最終分類では、 $|b_n|$ 一定から $|a_n| = 1$ を導き、負符号の tail が継続できないことまで確認するのが失点防止になる。