

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2017 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して、曲線

$$C: y = a - 1 - \log x \quad (x > 0)$$

を考える。

s を正の実数とし、曲線 C 上の点

$$P(s, a - 1 - \log s)$$

における接線が x 軸、 y 軸と交わる点を、それぞれ $(u(s), 0)$ 、 $(0, v(s))$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

必要があれば、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

を証明なしで用いてよい。

(1) 関数 $u(s), v(s)$ を s の式で表せ。

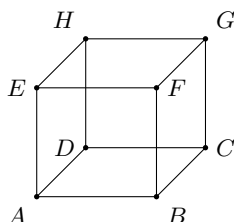
(2) 関数 $t = u(s)$ 、 $t = v(s)$ の 2 つのグラフを、増減・凹凸および交点の座標に注意して、同じ st 平面上に図示せよ。

(3) 関数 $t = u(s)$ 、 $t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

第 2 問

下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点上を点 P が次の規則で移動する。

時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに、点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点へ等確率で移動する。例えば、時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。



自然数 $n \geq 1$ に対して、次の確率を定める。

- (i) 点 P が時刻 n までの間に一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n とする。
- (ii) 点 P が時刻 n までの間に一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n とする。
- (iii) 点 P が時刻 n までの間に一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n とする。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p_2, q_2, r_2 および p_3, q_3, r_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 p_n, q_n, r_n を求めよ。
- (3) 自然数 $m \geq 1$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。
- (4) 自然数 $m \geq 2$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき、 $t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。
◇ M4(245—62)

第 3 問

xyz 空間の 2 点

$$A(0, 0, 2), \quad P(a, b, 0)$$

を通る直線を l とする。また、点 $(2, 0, 0)$ を中心とし、半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し、 S のうち $z > 0$ を満たす部分を T とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を

$$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$$

で定めるとき、点 Q の座標を a, b, t を用いて表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

第 4 問

n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が、次の条件 (I), (II), (III) を満たしている。

(I) 集合 M は n 個の要素からなる。

(II) 集合 M の要素 z に対して、

$$\frac{1}{z}, \quad -z$$

はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して、その積 zw は集合 M の要素である。ただし、 $z = w$ の場合も含める。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2) n は偶数であることを示せ。

(3) $n = 4$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。

(4) $n = 6$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)