

名古屋大学 2017 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して、曲線

$$C: y = a - 1 - \log x \quad (x > 0)$$

を考える。

s を正の実数とし、曲線 C 上の点

$$P(s, a - 1 - \log s)$$

における接線が x 軸、 y 軸と交わる点を、それぞれ $(u(s), 0)$ 、 $(0, v(s))$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

必要があれば、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

を証明なしで用いてよい。

(1) 関数 $u(s), v(s)$ を s の式で表せ。

(2) 関数 $t = u(s)$ 、 $t = v(s)$ の 2 つのグラフを、増減・凹凸および交点の座標に注意して、同じ st 平面上に図示せよ。

(3) 関数 $t = u(s)$ 、 $t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

接線の傾きは $-1/s$ なので、接線方程式から x 切片 $u(s)$ と y 切片 $v(s)$ を求める。グラフでは v の単調減少・下に凸、 u の上に凸・最大点・零点を確認し、交点は $(s-1)(a-\log s)=0$ から $s=1, e^a$ である。(3) では囲まれた領域が $1 \leq s \leq e^a$ にあり、この範囲で $u \geq v$ となることを確認する。回転軸は t 軸なので、円筒殻の半径 s 、高さ $u-v$ で体積を積分する。

【解答】

(1) 曲線 C は $y = a - 1 - \log x$ であり、導関数は $y' = -\frac{1}{x}$ である。点 $P(s, a - 1 - \log s)$ における接線は $y - (a - 1 - \log s) = -\frac{1}{s}(x - s)$ すなわち $y = a - \log s - \frac{x}{s}$ である。 x 軸との交点では $y = 0$ だから $0 = a - \log s - \frac{x}{s}$ より $u(s) = s(a - \log s)$ である。また y 軸との交点では $x = 0$ だから $v(s) = a - \log s$ である。

(2) まず $v(s) = a - \log s$ について、 $v'(s) = -\frac{1}{s} < 0$ 、 $v''(s) = \frac{1}{s^2} > 0$ である。したがって $v(s)$ は単調減少で下に凸であり、 $s = e^a$ で $v = 0$ となる。

次に $u(s) = s(a - \log s)$ について、 $u'(s) = a - \log s - 1$ 、 $u''(s) = -\frac{1}{s} < 0$ である。したがって $u(s)$ は上に凸で、 $u'(s) = 0$ となる $s = e^{a-1}$ で最大値 $u(e^{a-1}) = e^{a-1}$ をとる。また $u(s) = 0$ となるのは $s = e^a$ である。

2 つのグラフの交点は $s(a - \log s) = a - \log s$ より $(s-1)(a - \log s) = 0$ である。したがって $(s, t) = (1, a)$ 、 $(e^a, 0)$ で交わる。なお $0 < a < 1$ より $e^{a-1} < 1 < e^a$ である。以上の増減、凹凸、交点を同じ st 平面上に示せばよい。

(3) $1 \leq s \leq e^a$ では $a - \log s \geq 0$ かつ $s \geq 1$ なので $u(s) - v(s) = (s-1)(a - \log s) \geq 0$ である。したがってこの範囲で上側が $u(s)$ 、下側が $v(s)$ である。 t 軸のまわりに回転するので、円筒殻を用いる。半径は s 、高さは $u(s) - v(s)$ であるから、体積 V は

$$V = 2\pi \int_1^{e^a} s\{u(s) - v(s)\} ds = 2\pi \int_1^{e^a} s(s-1)(a - \log s) ds$$

である。

積分を

$$\int s(s-1)(a - \log s) ds = \int (s^2 - s)(a - \log s) ds$$

として計算する。部分積分により

$$\int s^2 \log s ds = \frac{s^3}{3} \log s - \frac{s^3}{9}, \quad \int s \log s ds = \frac{s^2}{2} \log s - \frac{s^2}{4}$$

である。したがって

$$\int (s^2 - s)(a - \log s) ds = \frac{as^3}{3} - \frac{as^2}{2} - \frac{s^3}{3} \log s + \frac{s^3}{9} + \frac{s^2}{2} \log s - \frac{s^2}{4}$$

である。これを 1 から e^a まで代入して整理すると

$$\int_1^{e^a} s(s-1)(a - \log s) ds = \frac{4e^{3a} - 9e^{2a} + 6a + 5}{36}$$

である。よって $V = \frac{\pi}{18} \{4e^{3a} - 9e^{2a} + 6a + 5\}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は接線の切片と導関数を整理し、交点・極値を図中にも示す。(3) は円筒殻ではなく、 t を固定した断面の円環で求める。区間 $1 \leq s \leq e^a$ では u, v がともに単調減少するため、逆関数を陽に求めず、境界を媒介変数 s のまま

$$\pi \int s^2 dt$$

で積分する。

【解答】

(1) 接線は

$$y = a - \log s - \frac{x}{s}$$

だから

$$u(s) = s(a - \log s), \quad v(s) = a - \log s.$$

(2)

$$\begin{aligned} u'(s) &= a - \log s - 1, & u''(s) &= -\frac{1}{s} < 0, \\ v'(s) &= -\frac{1}{s} < 0, & v''(s) &= \frac{1}{s^2} > 0. \end{aligned}$$

したがって u は上に凸で、 $s = e^{a-1}$ において最大値 e^{a-1} をとる。 v は単調減少で下に凸である。交点は

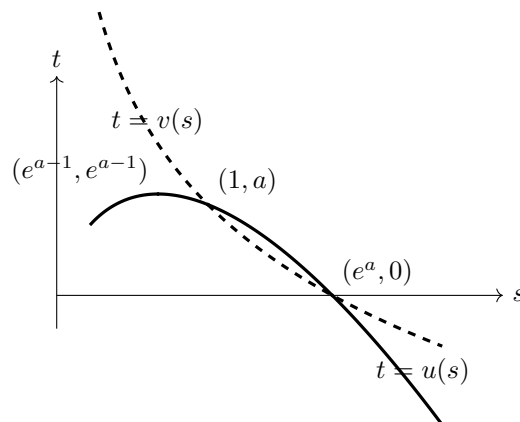
$$(s-1)(a - \log s) = 0$$

より

$$(1, a), \quad (e^a, 0).$$

また $0 < a < 1$ なので

$$e^{a-1} < 1 < e^a.$$



実線が $t = u(s)$ 、破線が $t = v(s)$ の概形である。

(3) $1 \leq s \leq e^a$ では u, v はともに単調減少する。高さ t の断面は、外側が u 側、内側が v 側の円環である。両境界の半径を $s_u(t), s_v(t)$ と書くと

$$V = \pi \int_0^a \{s_u(t)^2 - s_v(t)^2\} dt.$$

境界を $t = u(s), v(s)$ と媒介変数表示すれば

$$\begin{aligned} V &= \pi \left\{ - \int_1^{e^a} s^2 u'(s) ds + \int_1^{e^a} s^2 v'(s) ds \right\} \\ &= \pi \int_1^{e^a} s^2 \{v'(s) - u'(s)\} ds. \end{aligned}$$

両端で $u - v = 0$ であることを用いて部分積分すると

$$\begin{aligned} V &= -\pi \int_1^{e^a} s^2 (u - v)' ds \\ &= 2\pi \int_1^{e^a} s(u - v) ds \\ &= 2\pi \int_1^{e^a} s(s - 1)(a - \log s) ds. \end{aligned}$$

最後の積分は

$$\frac{4e^{3a} - 9e^{2a} + 6a + 5}{36}$$

だから

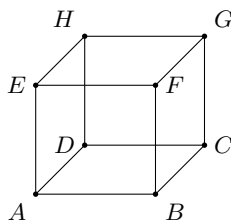
$$V = \frac{\pi}{18} (4e^{3a} - 9e^{2a} + 6a + 5).$$

【総評】 難度 6, 計算量 6. 目安時間は 24 分. 接線の式自体は短いですが, (2) の図示では $0 < a < 1$ から $e^{a-1} < 1 < e^a$ となる位置関係を押さえる必要がある. (3) は回転軸が t 軸なので, s 方向の円筒殻を使うのが自然である. $u - v = (s - 1)(a - \log s)$ の符号を確認してから積分に入ると, 上下の取り違えを防げる. 最後の積分は部分積分の基本形を明示して計算ミスを減らしたい.

【第 2 問】

下図のような立方体を考える. この立方体の 8 つの頂点上を点 P が次の規則で移動する.

時刻 0 では点 P は頂点 A にいる. 時刻が 1 増えるごとに, 点 P は, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点へ等確率で移動する. 例えば, 時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると, 時刻 $n + 1$ では, それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる.



自然数 $n \geq 1$ に対して, 次の確率を定める.

(i) 点 P が時刻 n までの間に一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n とする.

(ii) 点 P が時刻 n までの間に一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n とする.

(iii) 点 P が時刻 n までの間に一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n とする.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) p_2, q_2, r_2 および p_3, q_3, r_3 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき, p_n, q_n, r_n を求めよ.

(3) 自然数 $m \geq 1$ に対して, 点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ.

(4) 自然数 $m \geq 2$ に対して, 点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする. このとき, $t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) から (3) までは文系第 2 問と同じく、頂点を A からの距離 1, 距離 2, 距離 3 の 3 状態にまとめ、 A へ戻らない確率の漸化式を立てる。偶奇で状態が分かれるため $q_{n+2} = \frac{7}{9}q_n$ から一般項を得る。(4) では、2 回目の帰還が時刻 $2m$ で起こる事象を、初帰還時刻 $2i$ と、その後の初帰還時刻 $2(m-i)$ に分解する。したがって t_m は s_i の畳み込みになり、 $m = 2, 3$ を個別に処理したあと、 $m \geq 4$ で不等式を比較する。

【解答】

(1) 頂点 A から辺の本数で距離 1 の頂点 B, D, E の群を P , 距離 2 の頂点 C, F, H の群を Q , 距離 3 の頂点 G の群を R と呼ぶ。

時刻 1 では必ず P にいるので $p_1 = 1$, $q_1 = 0$, $r_1 = 0$ である。 P の各頂点からは、1 本が A へ、2 本が Q へ向かう。 A へ戻る場合は p_n, q_n, r_n には含まないので $p_2 = 0$, $q_2 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 0$ である。 Q の各頂点からは 2 本が P へ、1 本が R へ向かうから $p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9}$, $q_3 = 0$, $r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$ である。

(2) A へ戻らない道だけを追うと、遷移は

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

である。したがって

$$q_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3}q_n = \frac{7}{9}q_n$$

である。 $q_2 = 2/3$ より、 $m \geq 1$ について $q_{2m} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}$ である。偶数時刻には P, R にはいないので $p_{2m} = 0$, $r_{2m} = 0$ である。

また

$$p_{2m+1} = \frac{2}{3}q_{2m} = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}, \quad r_{2m+1} = \frac{1}{3}q_{2m} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}$$

であり、 $q_{2m+1} = 0$ である。よって

$$p_{2m} = 0, \quad q_{2m} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}, \quad r_{2m} = 0$$

$$p_{2m+1} = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}, \quad q_{2m+1} = 0, \quad r_{2m+1} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}$$

を得る。

(3) 時刻 $2m$ で初めて A に戻るには、時刻 $2m-1$ まで A に戻らず、その時刻に P にいて、次の 1 歩で A へ進めばよい。 P から A へ進む確率は $1/3$ である。

したがって $s_1 = \frac{1}{3}$ であり、 $m \geq 2$ では $s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1} = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$ である。

(4) 時刻 $2m$ で A に戻るのがちょうど 2 回目であるためには、ある i ($1 \leq i \leq m-1$) について、時刻 $2i$ に初めて A に戻り、そこからさらに $2(m-i)$ 後に初めて A に戻ればよい。 A に戻った後は同じ条件で再出発するので $t_m = \sum_{i=1}^{m-1} s_i s_{m-i}$ である。

まず $t_2 = s_1^2 = \frac{1}{9}$ であり、 $s_2 = \frac{4}{27}$ だから $t_2 < s_2$ である。また $t_3 = s_1 s_2 + s_2 s_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} = \frac{8}{81}$ であり、 $s_3 = \frac{4}{27} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{243}$ だから $t_3 < s_3$ である。

次に $m \geq 4$ とする。 $s_1 = 1/3$ と、 $j \geq 2$ で $s_j = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{j-2}$ を用いると、端の 2 項と中央の項に分けて $t_m = 2s_1 s_{m-1} + \sum_{i=2}^{m-2} s_i s_{m-i}$ である。よって

$$t_m = \frac{8}{81} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-3} + (m-3) \frac{16}{729} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

となり、整理して $t_m = \frac{8(2m+1)}{729} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$ である。一方

$$s_m = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2} = \frac{196}{2187} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

である。したがって $t_m < s_m$ は $\frac{8(2m+1)}{729} < \frac{196}{2187}$ すなわち $24(2m+1) < 196$ と同値である。これは $48m < 172$ を意味するので、 $m \geq 4$ では成り立たない。

以上より、求める m は $m = 2, 3$ である。

▶ 解法 2

【方針】

2 歩を 1 ブロックとして非帰還経路を直接数える。距離 2 の群 Q から 2 歩後にも Q にいる非帰還経路は 9 通り中 7 通りなので、確率漸化式を解かず一般項が得られる。(4) は最初の帰還時刻で事象を分割し、初帰還確率の積を足す。端の s_1 と等比型の中央項を分ける。

【解答】

頂点を A からの距離でまとめ、距離 1、2、3 の頂点群を P, Q, R とする。

(1) 最初の 1 歩で必ず P に入る。 P からは 3 本中 2 本が Q 、1 本が A へ向かうから

$$(p_2, q_2, r_2) = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right).$$

さらに Q からは 3 本中 2 本が P 、1 本が R へ向かうので

$$(p_3, q_3, r_3) = \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{2}{9}\right).$$

(2) Q から 2 歩進み、途中で A を通らず再び Q に入る経路は

$$Q \rightarrow P \rightarrow Q$$

の $2 \cdot 2 = 4$ 通りと、

$$Q \rightarrow R \rightarrow Q$$

の $1 \cdot 3 = 3$ 通り、計 7 通りである。よって

$$q_{2m} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}.$$

偶数時刻には P, R にいない。また Q からの次の 1 歩を数えると

$$\begin{aligned} p_{2m} &= 0, & q_{2m} &= \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}, & r_{2m} &= 0, \\ p_{2m+1} &= \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}, & q_{2m+1} &= 0, & r_{2m+1} &= \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-1}. \end{aligned}$$

(3) 初帰還の直前には P におり、最後に確率 $1/3$ で A へ進む。したがって

$$s_1 = \frac{1}{3}, \quad s_m = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2} \quad (m \geq 2).$$

(4) 最初の帰還が時刻 $2i$ 、そこから次の初帰還までが $2(m-i)$ である事象へ分けると

$$t_m = \sum_{i=1}^{m-1} s_i s_{m-i}.$$

まず

$$t_2 = \frac{1}{9} < \frac{4}{27} = s_2,$$

また

$$t_3 = \frac{8}{81} < \frac{28}{243} = s_3.$$

$m \geq 4$ では両端と中央の項を分けて

$$\begin{aligned} t_m &= 2s_1s_{m-1} + \sum_{i=2}^{m-2} s_i s_{m-i} \\ &= \frac{8}{81} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-3} + (m-3) \frac{16}{729} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \\ &= \frac{8(2m+1)}{729} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}. \end{aligned}$$

一方

$$s_m = \frac{196}{2187} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}.$$

したがって $t_m < s_m$ は

$$24(2m+1) < 196$$

と同値で、 $m \geq 4$ では成立しない。よって

$$m = 2, 3$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 目安時間は 28 分。(1) から (3) は文系版と同じ 3 状態整理で処理できるが、理系版では (4) の「ちょうど 2 回目」を初帰還確率の積に分解できるかが山場である。 t_m を単なる帰還確率として数えると、途中で複数回戻る場合を混ぜてしまう。 s_1 だけ式が別になるため、 $m = 2, 3$ を先に処理し、 $m \geq 4$ で端の項と中央の項を分けると計算が整理しやすい。

【第 3 問】

xyz 空間の 2 点

$$A(0, 0, 2), \quad P(a, b, 0)$$

を通る直線を l とする。また、点 $(2, 0, 0)$ を中心とし、半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し、 S のうち $z > 0$ を満たす部分を T とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を

$$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$$

で定めるとき、点 Q の座標を a, b, t を用いて表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 l 上の点を $Q = A + t(P - A)$ と表し、球面の方程式へ代入して t の 2 次方程式を作る。球面 S と相異なる 2 点で交わる条件は、この 2 次方程式の判別式が正であること。(3) では T が $z > 0$ の部分なので、交点に対応する 2 つの根がともに $t < 1$ でなければならない。判別式正に加え、 $h(1) > 0$ と根の和 < 2 を用いて、2 根がともに 1 より小さい条件へ落とす。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AP} = (a, b, -2)$ である。 $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ だから $Q = A + t(P - A) = (0, 0, 2) + t(a, b, -2)$ である。したがって点 Q の座標は $(at, bt, 2 - 2t)$ である。

(2) 球面 S の方程式は $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ である。(1) の $Q = (at, bt, 2-2t)$ を代入すると $(at-2)^2 + (bt)^2 + (2-2t)^2 = 2$ である。整理して $(a^2 + b^2 + 4)t^2 - (4a + 8)t + 6 = 0$ を得る。

直線 l が球面 S と相異なる 2 点で交わるための条件は、この t の 2 次方程式が相異なる 2 つの実数解をもつことである。したがって判別式が正であり、 $(4a + 8)^2 - 24(a^2 + b^2 + 4) > 0$ である。これを整理すると $(a-4)^2 + 3b^2 < 12$ となる。よって ab 平面上では、中心 $(4, 0)$ の楕円 $\frac{(a-4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1$ の内部である。

別解。球面の中心を $C = (2, 0, 0)$ とする。直線上の点 $Q(t) = (at, bt, 2-2t)$ と C の距離の 2 乗は $(at-2)^2 + (bt)^2 + (2-2t)^2$ であり、これが t について最小になる値が半径の 2 乗 2 より小さいとき、直線は球面と相異なる 2 点で交わる。この最小値条件を計算しても、同じく $(a-4)^2 + 3b^2 < 12$ を得る。

(3) T は S のうち $z > 0$ の部分である。(1) の表示では $z = 2 - 2t$ なので、 T 上の交点に対応する t は $t < 1$ を満たす必要がある。

(2) で得た 2 次方程式を $h(t) = (a^2 + b^2 + 4)t^2 - (4a + 8)t + 6$ とおく。まず相異なる 2 点で球面と交わるために $(a - 4)^2 + 3b^2 < 12$ が必要である。さらに、その 2 つの根がともに 1 より小さくなればよい。

上に開く 2 次関数で、2 つの実根をもつとき、2 根がともに 1 より小さいためには、 $h(1) > 0$ であり、かつ 2 根の和が < 2 であればよい。まず $h(1) = a^2 + b^2 + 4 - (4a + 8) + 6 = (a - 2)^2 + b^2 - 2$ より $(a - 2)^2 + b^2 > 2$ である。次に 2 根の和は $\frac{4a + 8}{a^2 + b^2 + 4}$ であるから、これが < 2 である条件は $4a + 8 < 2(a^2 + b^2 + 4)$ すなわち $(a - 1)^2 + b^2 > 1$ である。

したがって求める条件は $(a - 4)^2 + 3b^2 < 12$, $(a - 2)^2 + b^2 > 2$, $(a - 1)^2 + b^2 > 1$ である。図示すると、楕円 $(a - 4)^2 + 3b^2 < 12$ の内部から、円 $(a - 2)^2 + b^2 \leq 2$ および円 $(a - 1)^2 + b^2 \leq 1$ に含まれる部分を除いた領域である。境界は、楕円側は含まず、2 つの円周側も $z = 0$ または根の位置が端になるため含まない。

▶ 解法 2

【方針】

球の中心 C から直線 l までの距離を、 $Q(t)$ と C の距離の 2 乗の最小値として求める。(2) は最小距離が半径より小さい条件。(3) は交点を与える 2 根の midpoint と右側の根の位置に着目し、頂点が $t = 1$ より左にあり、かつ $h(1) > 0$ となる条件へ変える。楕円と 2 円の位置関係を図示する。

【解答】

(1)

$$Q(t) = A + t(P - A) = (at, bt, 2 - 2t).$$

(2) 球の中心を $C = (2, 0, 0)$ とする。距離の 2 乗は

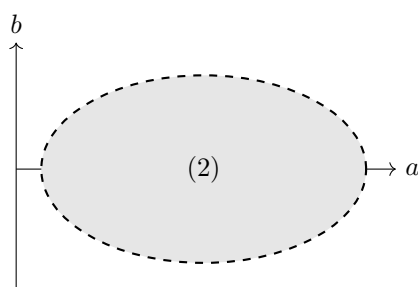
$$\begin{aligned} D(t) &= |Q(t) - C|^2 \\ &= (at - 2)^2 + b^2 t^2 + (2 - 2t)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + 4)t^2 - (4a + 8)t + 8. \end{aligned}$$

直線と球面が相異なる 2 点で交わるのは、 $D(t)$ の最小値が半径の 2 乗 2 より小さいときである。最小値の条件を整理すると

$$(4a + 8)^2 > 24(a^2 + b^2 + 4),$$

すなわち

$$(a - 4)^2 + 3b^2 < 12.$$



(3) 球面との交点を与える方程式は

$$h(t) = (a^2 + b^2 + 4)t^2 - (4a + 8)t + 6 = 0.$$

T 上では $z = 2 - 2t > 0$ だから、2 根がともに 1 より小さいことが必要十分である。

相異なる 2 実根をもつ条件のもとで、放物線 $y = h(t)$ の頂点が $t = 1$ より左にあり、かつ $h(1) > 0$ なら、 $t = 1$ は 2 根の右側にある。条件は

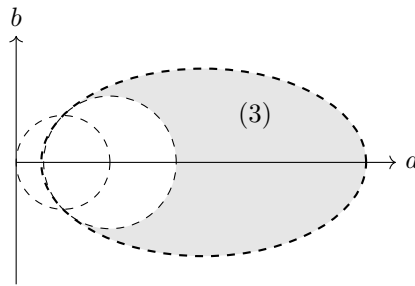
$$\frac{2a + 4}{a^2 + b^2 + 4} < 1, \quad h(1) > 0.$$

これらを整理すると

$$(a - 1)^2 + b^2 > 1, \quad (a - 2)^2 + b^2 > 2.$$

したがって求める領域は

$$\begin{cases} (a-4)^2 + 3b^2 < 12, \\ (a-2)^2 + b^2 > 2, \\ (a-1)^2 + b^2 > 1. \end{cases}$$



灰色部分が求める領域であり、3本の境界はいずれも含まない。

【総評】 難度 6, 計算量 6。目安時間は 24 分。空間図形だが、直線を t で表して球面へ代入すれば 2 次方程式の問題になる。(2) では判別式正がそのまま楕円内部を与える。(3) は上半球ではなく $z > 0$ の部分なので、 $t < 1$ という根の位置条件を追加する必要がある。 $h(1) > 0$ だけでは 2 根がともに 1 より大きい可能性も残るため、根の和 < 2 も合わせて確認するのが重要である。

【第 4 問】

n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が、次の条件 (I), (II), (III) を満たしている。

(I) 集合 M は n 個の要素からなる。

(II) 集合 M の要素 z に対して、

$$\frac{1}{z}, \quad -z$$

はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して、その積 zw は集合 M の要素である。ただし、 $z = w$ の場合も含める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2) n は偶数であることを示せ。

(3) $n = 4$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。

(4) $n = 6$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は任意の元 z とその逆数の積から 1 を作り、条件 (II) で -1 を得る。(2) は写像 $z \mapsto -z$ で元が 2 個ずつ組になることを使う。(3)(4) では、 $1, -1$ 以外の元 z を取り、 $z, z^2, z^3, \dots$ がすべて有限集合 M に入ることから、ある正整数 m で $z^m = 1$ となることを使う。 $n = 4$ では残り 2 元しかないので $z^2 = -1$ 。 $n = 6$ では最小の m が 3, 4, 5, 6 のどれかに限られ、 $m = 4, 5$ を矛盾で除いて、結局 6 乗して 1 になる複素数全体に定まることを示す。

【解答】

(1) M の要素を 1 つ z とする。条件 (II) より $1/z$ も M の要素である。条件 (III) より、これらの積 $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ は M の要素である。さらに条件 (II) を $z = 1$ に適用すると -1 も M の要素である。

(2) 条件 (II) より、 M の任意の要素 z に対して $-z$ も M の要素である。しかも $z = -z$ なら $z = 0$ であるが、 M の要素は 0 でないので、 z と $-z$ は必ず異なる。

したがって M の要素は $\{z, -z\}$ という 2 個ずつの組に分けられる。よって要素数 n は偶数である。

(3) $n = 4$ とする。(1) より $1, -1 \in M$ である。残りの要素の 1 つを z とすると、(2) より $-z$ も要素であり、 $M = \{1, -1, z, -z\}$ と書ける。

条件 (II) より $1/z \in M$ である。 $z \neq \pm 1$ なので、 $1/z$ は z または $-z$ のどちらかである。もし $1/z = z$ なら $z^2 = 1$ より $z = \pm 1$ となり矛盾する。したがって $\frac{1}{z} = -z$ であり、 $z^2 = -1$ を得る。よって $z = \pm i$ であり、集合としては一通りに

$M = \{1, -1, i, -i\}$ と定まる。

(4) $n = 6$ とする。 $1, -1$ 以外の要素を 1 つ取り、それを z とする。条件 (III) より $z, z^2, z^3, \dots$ はすべて M の要素である。 M は有限集合なので、この列には同じ値が現れる。したがって、ある正の整数 m について $z^m = 1$ となる。以下、そのような m のうち最小のものを考える。 $z \neq \pm 1$ より $m > 2$ であり、また $1, z, z^2, \dots, z^{m-1}$ は互いに異なるので $m \leq 6$ である。したがって $m = 3, 4, 5, 6$ のいずれかである。 $m = 4$ は不可能である。このとき $z^2 = -1$ であり、 $1, -1, z, -z$ の 4 要素がすでにある。残りの要素の 1 つを w とすると、 $-w$ も要素であり、 $M = \{1, -1, z, -z, w, -w\}$ である。ところが $zw \in M$ である。 $zw = \pm 1$ なら $w = \pm 1/z = \pm z$, $zw = \pm z$ なら $w = \pm 1$, $zw = \pm w$ なら $z = \pm 1$ となり、いずれも w の取り方または $z \neq \pm 1$ に反する。よって矛盾する。 $m = 5$ も不可能である。 $1, z, z^2, z^3, z^4$ は 5 個の異なる要素であり、さらに -1 も M に入る。これだけで 6 個である。しかし $-z$ も M に入る。もし $-z$ が $1, z, z^2, z^3, z^4$ のいずれかに等しいなら、右辺の 5 乗は 1 である。一方

$$(-z)^5 = -z^5 = -1$$

であり、矛盾する。したがって $-z$ はこれら 5 個とも -1 と異なる新しい要素となり、要素数が 6 を超えてしまう。

よって $m = 3$ または $m = 6$ である。 $m = 3$ のとき、 $1, z, z^2$ が 3 個の異なる要素であり、さらにそれらの負の数 $-1, -z, -z^2$ も M に入る。これで 6 個あり、 M は $\{1, z, z^2, -1, -z, -z^2\}$ である。ここで z は 1 でない 3 乗根だから、これらは 6 乗して 1 になる複素数全体である。 $m = 6$ のとき、 $1, z, z^2, z^3, z^4, z^5$ が 6 個の異なる要素なので、 M はこの 6 個である。また $(z^3)^2 = 1$ で、 $z^3 \neq 1$ だから $z^3 = -1$ である。したがって、この場合も M は 6 乗して 1 になる複素数全体である。

以上より、 $n = 6$ のとき M は一通りに定まり、その要素は

$$1, \quad -1, \quad \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

任意の $z \in M$ に対し、写像 $w \mapsto zw$ が有限集合 M の要素を並べ替えることを利用する。全要素の積を写像の前後で比較すると $z^n = 1$ が得られる。よって M は n 乗して 1 になる複素数全体に一致し、 $n = 4, 6$ の集合を一度に決定できる。

【解答】

(1) 任意の $z \in M$ に対して $1/z \in M$ であり、積について閉じているから

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 \in M.$$

さらに条件 (II) を 1 に適用して

$$-1 \in M.$$

(2) $z \in M$ なら $-z \in M$ である。 $z = -z$ なら $z = 0$ となるが、 M の要素は 0 でない。よって要素は $\{z, -z\}$ という 2 個ずつの組に分かれ、 n は偶数である。

(3)(4) を同時に考える。 M の要素を

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

とし、その積を $P = w_1 w_2 \cdots w_n$ とおく。すべての要素は 0 でないため $P \neq 0$ である。

$z \in M$ を固定する。条件 (III) より、各 w_j に対して $zw_j \in M$ である。また

$$zw_j = zw_k$$

なら $z \neq 0$ より $w_j = w_k$ である。したがって

$$zw_1, zw_2, \dots, zw_n$$

は M の全要素を並べ替えたものである。

両者の全要素を掛け合わせると

$$(zw_1)(zw_2) \cdots (zw_n) = w_1 w_2 \cdots w_n.$$

左辺は $z^n P$ だから

$$z^n P = P.$$

$P \neq 0$ より

$$z^n = 1.$$

これはすべての $z \in M$ に成り立つ。方程式 $z^n = 1$ の解は相異なる n 個であり、 M も n 個の要素をもつから、 M は n 乗して 1 になる複素数全体である。

(3) $n = 4$ のとき

$$M = \{1, -1, i, -i\}.$$

(4) $n = 6$ のとき

$$M = \left\{ 1, -1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right\}.$$

いずれも集合として一通りに定まる。

【総評】 難度 7, 計算量 5。目安時間は 24 分。抽象的に見えるが、使う事実は「積を繰り返しても集合内に残る」「有限集合なので同じ値が現れる」の 2 つである。群論の用語に頼らず、 $z^m = 1$ となる最小の m を場合分けすれば十分に書ける。 $n = 6$ では $m = 4, 5$ を除く論証が薄くなりやすいので、余った要素 w や $-z$ が新要素になる矛盾を丁寧に示すことが得点差になる。