

名古屋大学 2018 年度 文系

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b を実数とし、少なくとも一方は 0 でないとする。

(1) 次の 2 つの連立不等式のいずれかが表す領域が三角形となるために、 a, b が満たすべき条件を求めよ。さらに、その条件を満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ。

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4 \geq 0, \\ x - 2y + 4 \geq 0, \\ ax + by \geq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 4 \geq 0, \\ x - 2y + 4 \geq 0, \\ ax + by \leq 0. \end{cases}$$

(2) (1) の三角形の面積を S とするとき、 S を a, b を用いて表せ。

(3)

$$S \geq 4$$

を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

はじめの 2 直線の交点 $V = (-2, 1)$ から、共通領域の境界となる 2 本の半直線を方向ベクトル $(2, -3)$ 、 $(2, 1)$ で表す。直線 $ax + by = 0$ が両方の半直線を正の位置で切ることが、どちらか一方の符号の半平面で三角形を作れるための必要十分条件である。交点パラメータ t, s を求め、条件を (a, b) 平面の 2 つの扇形へ整理する。面積は 2 辺の行列式で計算する。

【解答】

(1)

固定された 2 直線の交点を V とすると

$$V = (-2, 1).$$

共通領域の境界となる 2 本の半直線は

$$\begin{aligned} V + t(2, -3) & \quad (t \geq 0), \\ V + s(2, 1) & \quad (s \geq 0) \end{aligned}$$

である。実際、第 1 の半直線上では $3x + 2y + 4 = 0$ 、第 2 の不等式は $8t \geq 0$ となる。第 2 の半直線でも同様である。

直線 $ax + by = 0$ が 2 本の半直線をともに正の位置で切れば、 $ax + by \geq 0$ または $ax + by \leq 0$ の適切な一方を選ぶことで三角形が得られる。逆に三角形ができるなら、この直線は両半直線を正の位置で切らなければならない。

各交点で

$$a(-2 + 2t) + b(1 - 3t) = 0, \quad a(-2 + 2s) + b(1 + s) = 0$$

だから

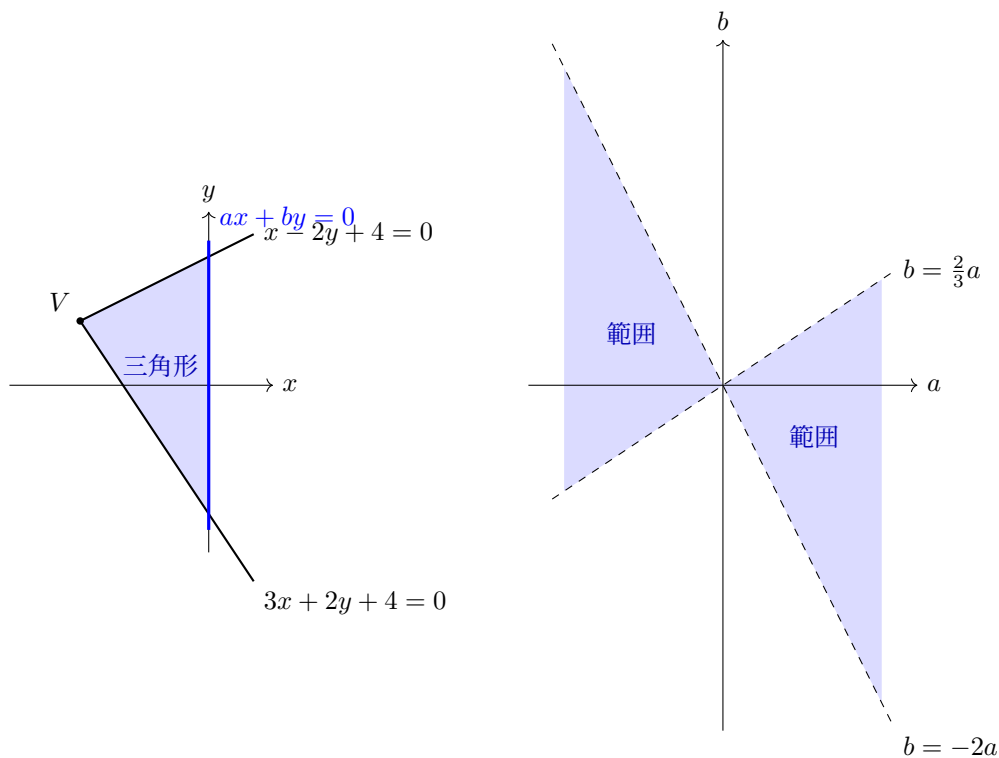
$$t = \frac{2a - b}{2a - 3b}, \quad s = \frac{2a - b}{2a + b}.$$

したがって必要十分条件は

$$\frac{2a - b}{2a - 3b} > 0, \quad \frac{2a - b}{2a + b} > 0.$$

3 つの式 $2a - b, 2a - 3b, 2a + b$ がすべて同符号になる条件を整理すると

$$\begin{cases} a > 0, \\ -2a < b < \frac{2}{3}a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a < 0, \\ \frac{2}{3}a < b < -2a. \end{cases}$$



境界上では直線が頂点 V を通るか、一方の半直線と平行になるため、いずれも含まれない。

(2)

三角形の V から出る 2 辺は

$$t(2, -3), \quad s(2, 1)$$

である。したがって

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2t & 2s \\ -3t & s \end{pmatrix} \right\| \\ = 4ts.$$

(1) の条件のもとで $t, s > 0$ だから

$$S = \frac{4(2a-b)^2}{(2a-3b)(2a+b)}.$$

(3)

(1) の範囲では

$$(2a-3b)(2a+b) > 0.$$

また

$$(2a-b)^2 - (2a-3b)(2a+b) = 4b^2 \geq 0.$$

よって正の分母で割ると

$$\frac{(2a-b)^2}{(2a-3b)(2a+b)} \geq 1.$$

(2) より

$$S \geq 4.$$

等号は $b = 0$ のときに成り立つ。

▶ 解法 2

【方針】

頂点 $V = (-2, 1)$ を原点とする斜交座標を入れる。共通領域の点を $V + u(2, -3) + v(2, 1)$ ($u, v \geq 0$) と表すと、直線 $ax + by = 0$ は u, v 平面で切片形の一次方程式になる。両切片が正である条件と、座標変換の面積倍率 8 から、条件と面積を同時に導く。

【解答】

(1)

共通領域の点を

$$(x, y) = (-2, 1) + u(2, -3) + v(2, 1), \quad u, v \geq 0$$

と表す。このとき

$$ax + by = -(2a - b) + (2a - 3b)u + (2a + b)v.$$

したがって直線 $ax + by = 0$ は

$$(2a - 3b)u + (2a + b)v = 2a - b$$

となる。

この直線が u 軸、 v 軸の正の部分切るための条件は

$$\frac{2a - b}{2a - 3b} > 0, \quad \frac{2a - b}{2a + b} > 0.$$

これを符号で整理して

$$a > 0, \quad -2a < b < \frac{2}{3}a$$

または

$$a < 0, \quad \frac{2}{3}a < b < -2a$$

を得る。

(2)

u, v 平面でできる三角形の 2 切片は

$$t = \frac{2a - b}{2a - 3b}, \quad s = \frac{2a - b}{2a + b}$$

だから、その面積は $ts/2$ である。座標変換の面積倍率は

$$\left| \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right| = 8$$

なので

$$S = 8 \cdot \frac{ts}{2} = \frac{4(2a - b)^2}{(2a - 3b)(2a + b)}.$$

(3)

分子を分母で割る形にすると

$$S = 4 \left(1 + \frac{4b^2}{(2a - 3b)(2a + b)} \right).$$

(1) の条件のもとでは分母が正であるから、括弧内は 1 以上である。よって

$$S \geq 4.$$

【総評】 難度 8、目安時間 35 分。2 本の固定直線が作る無限の角領域を、原点を通る直線 $ax + by = 0$ で切り取る問題である。三角形ができる条件は、第三の直線が頂点から出る 2 本の半直線をともに正の位置で切ること。答えは (a, b) 平面で互いに反対向きの 2 つの開いた扇形になる。面積は行列式でも斜交座標の面積倍率でも求められ、 $(2a - b)^2 - (2a - 3b)(2a + b) = 4b^2$ が評価の核心である。境界を含まないことと、(3) で分母が正であることを明記する。

【第 2 問】

(1) 整数 α, β の少なくとも一方が奇数のとき、

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

は奇数であることを示せ。

(2) n を奇数とする。このとき

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n$$

を満たす整数 α, β は存在しないことを示せ。(3) c を実数とする。このとき 3 次方程式

$$x^3 - 2018x + c = 0$$

の解のうち、整数であるものは 1 個以下であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は α, β の偶奇を 3 通りに分ける。(2) は、少なくとも一方が奇数なら左辺が奇数、両方が偶数なら左辺が 4 の倍数となる一方、右辺 $2n$ は 4 で割ると 2 余ることを使う。(3) は異なる 2 整数解 r, s があると仮定して方程式の差を取り、 $r^2 + rs + s^2 = 2018 = 2 \cdot 1009$ を導いて (2) に反することを示す。

【解答】

(1)

平方はもとの整数と同じ偶奇をもつので

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \equiv \alpha + \alpha\beta + \beta \pmod{2}.$$

 (α, β) の偶奇は

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 1)$$

のいずれかである。右辺の余りはそれぞれ

$$1, \quad 1, \quad 1 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

したがって $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数である。

(2)

 n は奇数なので

$$2n \equiv 2 \pmod{4}.$$

もし α, β の少なくとも一方が奇数なら、(1) より左辺は奇数となり、偶数 $2n$ に等しくない。一方、 α, β がともに偶数なら $\alpha = 2u, \beta = 2v$ と書ける。このとき

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 4(u^2 + uv + v^2)$$

は 4 の倍数であり、 $2n \equiv 2 \pmod{4}$ に等しくない。よって条件を満たす整数 α, β は存在しない。

(3)

異なる 2 つの整数解 r, s があると仮定する。すると

$$r^3 - 2018r + c = 0, \quad s^3 - 2018s + c = 0.$$

両式を引いて

$$(r - s)(r^2 + rs + s^2 - 2018) = 0.$$

 $r \neq s$ だから

$$r^2 + rs + s^2 = 2018 = 2 \cdot 1009.$$

1009 は奇数であるため、これは (2) に $n = 1009, \alpha = r, \beta = s$ を代入した式に反する。したがって整数解は 1 個以下である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は式を 2 を法として $(\alpha + 1)(\beta + 1) - 1$ に変形し、一方が奇数なら積が偶数になることを使う。(2) は左辺が偶数なら両変数が偶数でなければならないことを先に確定し、4 を法として矛盾させる。(3) は 1 つの整数解で多項式を割った商を用い、別の整数解がある場合に (2) の禁止式が現れることを示す。

【解答】

(1)

2 を法として

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &\equiv \alpha + \alpha\beta + \beta \\ &= (\alpha + 1)(\beta + 1) - 1 \pmod{2}.\end{aligned}$$

α, β の少なくとも一方が奇数なら、 $\alpha + 1, \beta + 1$ の少なくとも一方は偶数である。よって積は偶数であり、上式は $1 \pmod{2}$ となる。

(2)

仮に

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n$$

が成り立つとする。右辺は偶数なので、(1) の対偶から α, β はともに偶数である。すると左辺は 4 の倍数である。しかし奇数 n に対して $2n$ は 4 の倍数ではない。これは矛盾である。

(3)

整数 r が方程式の解だとする。 $c = -r^3 + 2018r$ を代入すると

$$x^3 - 2018x - r^3 + 2018r = (x - r)(x^2 + rx + r^2 - 2018).$$

もし r と異なる整数解 s も存在すれば

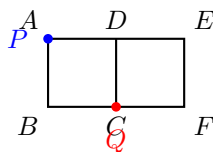
$$s^2 + rs + r^2 = 2018 = 2 \cdot 1009$$

となるが、(2) に反する。よって整数解は高々 1 個である。

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。偶奇の補題を 3 次方程式へつなぐ誘導問題である。(2) では左辺は「少なくとも一方が奇数なら奇数」「両方が偶数なら 4 の倍数」のどちらかであり、4 で割って 2 余る数にはならない。(3) は異なる 2 整数解を仮定して差を取るか、1 つの整数解で因数分解すると、ちょうど (2) の形が現れる。 $2018 = 2 \cdot 1009$ かつ 1009 が奇数であることを明記する。

【第 3 問】

下図のように、2 つの正方形 $ABCD$ と $CDEF$ を辺 CD で共有するように並べた図形を考える。



2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を次の規則に従って移動する。

(a) 時刻 0 では、点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 C にいる。

(b) 点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に、今いる頂点と辺で結ばれている頂点へ等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点が同時に同じ頂点にすることが一度もない確率を p_n とする。また、時刻 n まで一度も同じ頂点におらず、かつ時刻 n に 2 点がともに同じ正方形上にいる確率を a_n とし、 $b_n = p_n - a_n$ と定める。

(1) 時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を、すべて図示せよ。

(2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。

(3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

頂点の隣接関係を明示し、時刻 1 では P の 2 通りと Q の 3 通りを組み合わせる 6 配置を図示する。そのうち衝突 2 配置を除き、残る 4 配置を「同じ正方形上」と「異なる正方形」に分類する。以後に現れる非衝突配置は 2 種類にまとめられ、同じ正方形型からの遷移確率は $(1/2, 1/6)$ 、異なる正方形型からは $(1/2, 1/4)$ となる。最後は 1 歩後まで生存する確率が最大でも $3/4$ であることを使う。

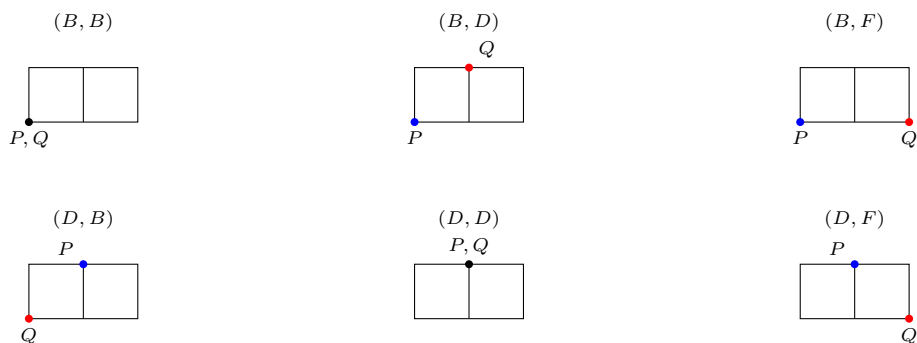
【解答】

(1)

時刻 1 で P は B, D のいずれかへ、 Q は B, D, F のいずれかへ移る。よって 6 配置は

$$(B, B), (B, D), (B, F), (D, B), (D, D), (D, F)$$

である。これらを図示すると次のようになる。



(2)

時刻 1 の 6 配置はそれぞれ確率 $1/6$ である。 $(B, B), (D, D)$ は衝突するので除く。残るうち

$$(B, D), (D, B), (D, F)$$

は 2 点が同じ正方形上にあり、 (B, F) だけは異なる正方形にいる。よって

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{6}.$$

時刻 1 の各非衝突配置から、時刻 2 での非衝突配置を数える。

時刻 1 の配置	全移動数	a_2 型	b_2 型
(B, D)	6	3	1
(D, B)	6	3	1
(D, F)	6	3	1
(B, F)	4	2	1

したがって

$$a_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3},$$

$$b_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

(3)

時刻 n まで衝突していない到達可能な配置は、偶数時刻では

$$(A, C), (C, A), (C, E), (E, C), (A, E), (E, A),$$

奇数時刻では

$$(B, D), (D, B), (D, F), (F, D), (B, F), (F, B)$$

である。いずれの時刻でも、前 4 配置が a_n 型、後 2 配置が b_n 型である。

代表配置を 1 つずつ調べると、次の遷移表を得る。

現在の型	全移動数	a_{n+1} 型	b_{n+1} 型
a_n 型	6	3	1
b_n 型	4	2	1

図形の左右対称性により、同じ型の他の配置でも同じである。したがって

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \\ &\leq \frac{3}{4}(a_n + b_n) = \frac{3}{4}p_n. \end{aligned}$$

時刻 0 ではまだ衝突していないので $p_0 = 1$ である。上の不等式を繰り返して

$$p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

▶ 解法 2

【方針】

非衝突配置を同じ正方形上の型 A と異なる正方形の型 B にまとめ、確率ベクトル $\mathbf{v}_n = (a_n, b_n)^T$ を使う。代表配置の全移動を数えて 2 行 2 列の遷移行列を作る。初期ベクトルから $n = 2$ の値を計算し、列ごとの生存確率の最大値 $3/4$ を使って全確率を評価する。

【解答】

(1)

時刻 1 の配置は

$$(B, B), (B, D), (B, F), (D, B), (D, D), (D, F)$$

の 6 通りである。うち $(B, B), (D, D)$ は時刻 1 で衝突する。

(2)

非衝突 4 配置のうち、同じ正方形上にあるものが 3 個、異なる正方形にあるものが 1 個なので

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

同じ正方形型の代表 (B, D) からは 6 通り中、次の同じ正方形型が 3 通り、異なる正方形型が 1 通りである。異なる正方形型の代表 (B, F) からは 4 通り中、それぞれ 2 通り、1 通りである。よって遷移行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\mathbf{v}_2 = M\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/8 \end{pmatrix}.$$

(3)

同じ分類はすべての時刻で保たれるため

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n.$$

(4)

行列の第 1 列の和は $2/3$ 、第 2 列の和は $3/4$ である。これは、現在が同じ正方形型なら次の 1 歩でも衝突しない確率が $2/3$ 、異なる正方形型なら $3/4$ であることを意味する。したがって条件付き生存確率は常に $3/4$ 以下であり、

$$p_{n+1} \leq \frac{3}{4} p_n.$$

$p_0 = 1$ から

$$p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

【総評】 難度 8、目安時間 30 分。図の欠落は状態分類そのものを分かりにくくするため、初期配置と時刻 1 の全 6 配置を実図で示した。非衝突で到達可能な配置は、偶数時刻と奇数時刻で頂点集合が入れ替わるが、各時刻とも「同じ正方形型 4 配置・異なる正方形型 2 配置」に整理できる。漸化式の係数には次の 1 歩で衝突する場合を含めない。 $a_2 = 1/3, b_2 = 1/8$ は直接列挙と行列計算の両方で検算でき、(4) は各型の 1 歩生存確率 $2/3, 3/4$ の最大値を使う。