

入 学 試 験 問 題



数 学

名古屋大学 2018 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

自然数 n に対し、定積分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$$

を考える。

(1)

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(2)

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$$

を求めよ。

(4)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

とする。(1)、(2) を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ。

第 2 問

a を 1 より大きい実数とする。

- (1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は、存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ。
- (2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。
- (3) 2 つのグラフの共有点が 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

第 3 問

p を素数、 a, b を整数とする。

(1)

$$(a + b)^p - a^p - b^p$$

は p で割り切れることを示せ。

(2)

$$(a + 2)^p - a^p$$

は偶数であることを示せ。

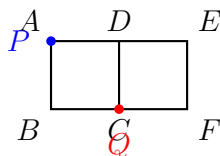
(3)

$$(a + 2)^p - a^p$$

を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。

第 4 問

下図のように、2つの正方形 $ABCD$ と $CDEF$ を辺 CD で共有するように並べた図形を考える。



2点 P, Q が6個の頂点 A, B, C, D, E, F を次の規則に従って移動する。

(a) 時刻0では、点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 C にいる。

(b) 点 P, Q は時刻が1増えるごとに独立に、今いる頂点と辺で結ばれている頂点へ等確率で移動する。

時刻 n まで2点が同時に同じ頂点にいたことが一度もない確率を p_n とする。また、時刻 n まで一度も同じ頂点におらず、かつ時刻 n に2点がともに同じ正方形上にいる確率を a_n とし、 $b_n = p_n - a_n$ と定める。

(1) 時刻1での点 P, Q の可能な配置を、すべて図示せよ。

(2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。

(3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)