

名古屋大学 2018 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数 n に対し、定積分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$$

を考える。

(1)

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(2)

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$$

を求めよ。

(4)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

とする。(1)、(2) を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 2 つの被積分関数を足し、分子の $1+x^2$ を約分する。(2) は $0 \leq x \leq 1$ で $x^{n+1} \leq x^n$ を積分する。(3) は (1) と単調性から I_n の上下界を作り、はさみうちを使う。(4) は $1/(2k) = I_{2k-1} + I_{2k+1}$ と書き、中間の積分を交替的に消去して I_1 へ帰着する。

【解答】

(1)

定義より

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(2)

 $0 \leq x \leq 1$ では

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n.$$

各辺を 0 から 1 まで積分して

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

を得る。

(3)

(2) より $I_{n+2} \leq I_n$ なので、(1) と合わせて

$$2I_n \geq I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

よって

$$I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}.$$

この下界を $n+2$ に適用すると

$$I_{n+2} \geq \frac{1}{2(n+3)}.$$

したがって (1) より

$$I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+3)}.$$

ゆえに

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{n+1} - \frac{n}{2(n+3)}.$$

両端はともに $1/2$ に収束するから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}.$$

(4)

(1) で $n = 2k - 1$ とすると

$$\frac{1}{2k} = I_{2k-1} + I_{2k+1}.$$

したがって

$$\begin{aligned} S_n &= (I_1 + I_3) - (I_3 + I_5) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} (I_{2n-1} + I_{2n+1}) \\ &= I_1 + (-1)^{n-1} I_{2n+1}. \end{aligned}$$

(2) より

$$0 \leq I_{2n+1} \leq \frac{1}{2n+2},$$

したがって $I_{2n+1} \rightarrow 0$ である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I_1.$$

最後に

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \log 2.$$

▶ 解法 2

【方針】

(3) では I_n と $\frac{1}{2(n+1)}$ の差を 1 つの積分にまとめ、その誤差を $O(1/n^2)$ の具体的な上界で挟む。(4) では有限和を先に積分へ直し、有限等比級数を用いて一度に I_1 と余項へ分解する。

【解答】

(1)

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{1}{n+1}.$$

(2)

区間 $0 \leq x \leq 1$ における

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

を $1+x^2 > 0$ で割って積分すれば、最初の 3 項の大小を得る。また

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

より $I_n \leq 1/(n+1)$ である。

(3)

$$\begin{aligned} I_n - \frac{1}{2(n+1)} &= \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1-x^2)}{2(1+x^2)} dx. \end{aligned}$$

被積分関数は非負で、さらに

$$0 \leq \frac{x^n(1-x^2)}{2(1+x^2)} \leq \frac{1}{2}x^n(1-x^2).$$

したがって

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_n - \frac{1}{2(n+1)} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 (x^n - x^{n+2}) dx \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+3)}. \end{aligned}$$

全体を n 倍すれば誤差の上界は 0 に収束するため

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}.$$

(4)

$$\frac{1}{2k} = \int_0^1 x^{2k-1} dx$$

なので、有限和と積分を交換して

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k-1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x\{1 - (-x^2)^n\}}{1+x^2} dx \\ &= I_1 + (-1)^{n-1} I_{2n+1}. \end{aligned}$$

(2) より余項は 0 に収束するから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I_1 = \frac{1}{2} \log 2.$$

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。定積分の漸化式、評価、有限交代和が一続きになった問題である。積分式はすべて別行に置き、被積分関数の大小と積分後の大小を対応させる。(3) は漸化式によるはさみうちに加え、 $I_n - \frac{1}{2(n+1)}$ の誤差を直接評価すると極限 $1/2$ がさらに明瞭になる。(4) は既知の交代級数を引用せず、設問の I_n に戻して余項が 0 になることまで示す。

【第 2 問】

a を 1 より大きい実数とする。

- (1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は、存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ。
- (2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。
- (3) 2 つのグラフの共有点が 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 つの関数は互いに逆関数である。共有点 (x, y) では $y = a^x$ 、 $x = a^y$ が同時に成り立ち、 $a > 1$ の単調性から $x = y$ を示せる。共有点は方程式 $a^x = x$ の正の解に対応するので、 $\phi(x) = a^x - x$ の強い凸性から零点が 2 個以下であることを示す。1 個だけなら最小点で接するため、 $\phi(x) = \phi'(x) = 0$ を解く。

【解答】

(1)

共有点を (x, y) とする。

$$y = a^x, \quad y = \log_a x$$

であり、後式は $x = a^y$ と同値である。もし $x > y$ なら、 $a > 1$ より $a^x > a^y$ である。一方 $a^x = y$, $a^y = x$ だから $y > x$ となり矛盾する。 $x < y$ も同様に矛盾する。したがって

$$x = y,$$

すなわち共有点は直線 $y = x$ 上にある。

(2)

(1) より共有点は方程式

$$a^x = x$$

の正の解 (x, x) に対応する。

$$\phi(x) = a^x - x$$

とおくと

$$\phi'(x) = a^x \log a - 1, \quad \phi''(x) = a^x (\log a)^2 > 0.$$

よって ϕ' は狭義単調増加である。

もし ϕ が 3 個以上の零点をもてば、ロルの定理により、その間に ϕ' の零点が少なくとも 2 個存在する。しかし ϕ' は狭義単調増加なので不可能である。したがって共有点は 2 個以下である。

(3)

$$\phi(0) = 1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = +\infty.$$

さらに ϕ は下に凸である。正の零点が 1 個だけなら、その点で x 軸に接するので

$$a^x = x, \quad a^x \log a = 1.$$

第 1 式を第 2 式へ代入して

$$x \log a = 1.$$

また第 1 式の両辺の対数をとると

$$x \log a = \log x.$$

よって $\log x = 1$ 、すなわち $x = e$ である。さらに

$$\log a = \frac{1}{e}$$

だから

$$a = e^{1/e}.$$

共有点は

$$(e, e)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

共有点が $y = x$ 上にあることを示した後、 $a^x = x$ の両辺の対数をとって $\log a = (\log x)/x$ とする。関数 $h(x) = (\log x)/x$ は $x = e$ でただ 1 つの最大値 $1/e$ をもつため、水平線 $y = \log a$ との交点数から (2)(3) を同時に判定できる。

【解答】

(1)

共有点では

$$y = a^x, \quad x = a^y.$$

a^t は狭義単調増加なので、 $x > y$ と $x < y$ はどちらも左右の大小を逆転させて矛盾する。よって $x = y$ である。

(2)

共有点の x 座標は $a^x = x$ を満たす。両辺の対数をとると

$$\log a = \frac{\log x}{x}.$$

$$h(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

とおけば

$$h'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

したがって h は $0 < x < e$ で増加し、 $x > e$ で減少する。ゆえに水平線 $y = \log a$ との交点は高々 2 個である。

(3)

h の最大値は

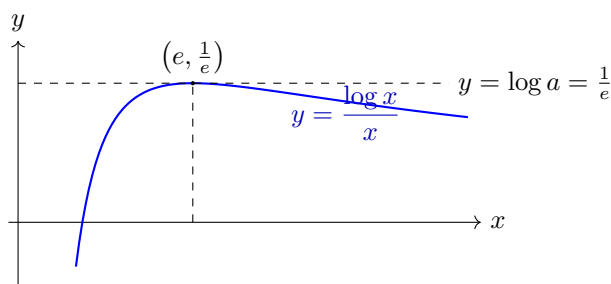
$$h(e) = \frac{1}{e}.$$

$\log a > 0$ であり、水平線との交点がちょうど 1 個になるのは最大点に接するときだけである。したがって

$$\log a = \frac{1}{e}, \quad x = e.$$

よって

$$a = e^{1/e}, \quad \text{共有点は } (e, e).$$



【総評】 難度 5、目安時間 20 分。逆関数のグラフが直線 $y = x$ に関して対称であることを、 $a > 1$ の単調性で厳密に示す。(2)(3) は、下に凸な $\phi(x) = a^x - x$ を使う方法と、山型の $h(x) = (\log x)/x$ を使う方法がある。共有点が 1 個のときは単に「接する」と述べるだけでなく、両端で $\phi > 0$ となること、または h の最大値であることを根拠にする。

【第 3 問】

p を素数、 a, b を整数とする。

(1)

$$(a+b)^p - a^p - b^p$$

は p で割り切れることを示せ。

(2)

$$(a+2)^p - a^p$$

は偶数であることを示せ。

(3)

$$(a+2)^p - a^p$$

を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は二項定理で展開し、中間項の係数 ${}_p C_j$ が素数 p で割り切れることを示す。(2) は $a+2$ と a が同じ偶奇であることを使う。(3) は $p=2$ を先に処理する。奇素数のときは (1) を 2 度使って p を法とする余りを 2 と定め、さらに (2) の偶数条件を合わせて $2p$ での余りを一意に決める。

【解答】

(1)

二項定理より

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{j=1}^{p-1} {}_p C_j a^{p-j} b^j.$$

$1 \leq j \leq p-1$ とする。係数

$${}_p C_j = \frac{p!}{j!(p-j)!}$$

の分子には因子 p が含まれ、分母には含まれない。したがって ${}_p C_j$ は p の倍数である。和の各項が p で割り切れるので、題意が従う。

(2)

$a+2$ と a は同じ偶奇である。整数 m と m^p は同じ偶奇をもつので、 $(a+2)^p$ と a^p も同じ偶奇である。よってその差は偶数である。

(3)

$p=2$ のとき

$$(a+2)^2 - a^2 = 4(a+1)$$

は $2p=4$ で割り切れる。余りは 0 である。

次に p を奇素数とする。(1) で $b=2$ とすると

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2^p \pmod{p}.$$

また (1) で $a=b=1$ とすると

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}.$$

したがって

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{p}.$$

$2p$ で割った余りを r とする。(2) より r は偶数であり、

$$0 \leq r < 2p, \quad r \equiv 2 \pmod{p}.$$

候補は $2, p+2$ だが、 $p+2$ は奇数なので除かれる。よって

$$r = 2.$$

以上から余りは

$$\begin{cases} 0 & (p = 2), \\ 2 & (p \text{ が奇素数}) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) では ${}_pC_j = \frac{p}{j} {}_{p-1}C_{j-1}$ を用い、 j が p と互いに素であることから係数が p の倍数だと示す。(1) から得られる合同式を繰り返して $m^p \equiv m \pmod{p}$ を導けば、(3) の p を法とする計算を一行で行える。最後は偶奇と中国剰余的な組合せで $2p$ の余りを決める。

【解答】

(1)

$1 \leq j \leq p-1$ に対して

$${}_pC_j = \frac{p}{j} {}_{p-1}C_{j-1}.$$

左辺と ${}_{p-1}C_{j-1}$ は整数であり、 p と j は互いに素である。等式

$$j {}_pC_j = p {}_{p-1}C_{j-1}$$

から、 ${}_pC_j$ は p の倍数である。二項展開の中間項はすべて p の倍数となるため

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

(2)

2 を法とすると $a+2 \equiv a$ なので

$$(a+2)^p - a^p \equiv 0 \pmod{2}.$$

(3)

(1) で $b=1$ とすると

$$(m+1)^p \equiv m^p + 1 \pmod{p}.$$

これを整数の代表 $m = 0, 1, \dots, p-1$ に順に用いると

$$m^p \equiv m \pmod{p}$$

を得る。したがって

$$(a+2)^p - a^p \equiv (a+2) - a \equiv 2 \pmod{p}.$$

p が奇数なら、 p を法として 2、2 を法として 0 となる $0 \leq r < 2p$ は $r = 2$ だけである。 $p = 2$ は直接計算して余り 0 となる。よって

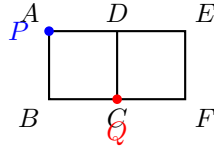
$$\begin{cases} 0 & (p = 2), \\ 2 & (p \neq 2) \end{cases}$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。二項係数の整除性、偶奇、合同式を順に組み合わせる問題である。(1) では中間係数が p の倍数である理由を省略しない。(3) は $p = 2$ と奇素数を必ず分け、奇素数では「 p を法として 2」と「偶数」の 2 条件を同時に使う。どちらか一方だけでは $2p$ の余りは決まらない。

【第 4 問】

下図のように、2つの正方形 $ABCD$ と $CDEF$ を辺 CD で共有するように並べた図形を考える。



2点 P, Q が6個の頂点 A, B, C, D, E, F を次の規則に従って移動する。

(a) 時刻0では、点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 C にいる。

(b) 点 P, Q は時刻が1増えるごとに独立に、今いる頂点と辺で結ばれている頂点へ等確率で移動する。

時刻 n まで2点が同時に同じ頂点にすることが一度もない確率を p_n とする。また、時刻 n まで一度も同じ頂点におらず、かつ時刻 n に2点がともに同じ正方形上にいる確率を a_n とし、 $b_n = p_n - a_n$ と定める。

(1) 時刻1での点 P, Q の可能な配置を、すべて図示せよ。

(2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。

(3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

頂点の隣接関係を明示し、時刻1では P の2通りと Q の3通りを組み合わせる6配置を図示する。そのうち衝突2配置を除き、残る4配置を「同じ正方形上」と「異なる正方形」に分類する。以後に現れる非衝突配置は2種類にまとめられ、同じ正方形型からの遷移確率は $(1/2, 1/6)$ 、異なる正方形型からは $(1/2, 1/4)$ となる。最後は1歩後まで生存する確率が最大でも $3/4$ であることを使う。

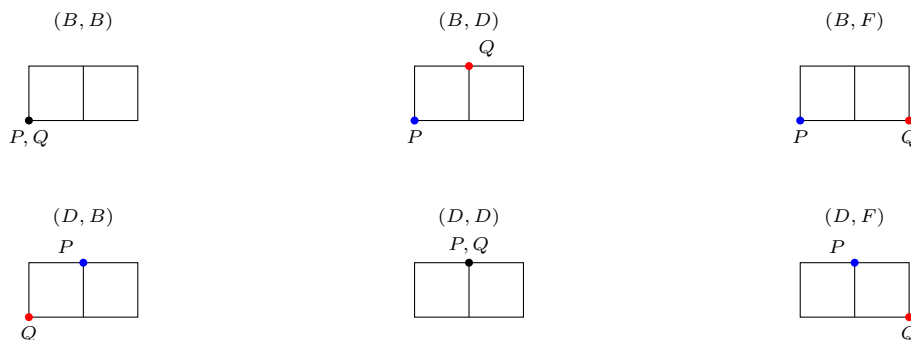
【解答】

(1)

時刻1で P は B, D のいずれかへ、 Q は B, D, F のいずれかへ移る。よって6配置は

$$(B, B), (B, D), (B, F), (D, B), (D, D), (D, F)$$

である。これらを図示すると次のようになる。



(2)

時刻1の6配置はそれぞれ確率 $1/6$ である。 $(B, B), (D, D)$ は衝突するので除く。残るうち

$$(B, D), (D, B), (D, F)$$

は2点が同じ正方形上にあり、 (B, F) だけは異なる正方形にいる。よって

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{6}.$$

時刻 1 の各非衝突配置から、時刻 2 での非衝突配置を数える。

時刻 1 の配置	全移動数	a_2 型	b_2 型
(B, D)	6	3	1
(D, B)	6	3	1
(D, F)	6	3	1
(B, F)	4	2	1

したがって

$$a_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3},$$

$$b_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

(3)

時刻 n まで衝突していない到達可能な配置は、偶数時刻では

$$(A, C), (C, A), (C, E), (E, C), (A, E), (E, A),$$

奇数時刻では

$$(B, D), (D, B), (D, F), (F, D), (B, F), (F, B)$$

である。いずれの時刻でも、前 4 配置が a_n 型、後 2 配置が b_n 型である。

代表配置を 1 つずつ調べると、次の遷移表を得る。

現在の型	全移動数	a_{n+1} 型	b_{n+1} 型
a_n 型	6	3	1
b_n 型	4	2	1

図形の左右対称性により、同じ型の他の配置でも同じである。したがって

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n,$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n.$$

(4)

$$p_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$$

$$= \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n$$

$$\leq \frac{3}{4}(a_n + b_n) = \frac{3}{4}p_n.$$

時刻 0 ではまだ衝突していないので $p_0 = 1$ である。上の不等式を繰り返して

$$p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

▶ 解法 2

【方針】

非衝突配置を同じ正方形上の型 A と異なる正方形の型 B にまとめ、確率ベクトル $\mathbf{v}_n = (a_n, b_n)^T$ を使う。代表配置の全移動を数えて 2 行 2 列の遷移行列を作る。初期ベクトルから $n = 2$ の値を計算し、列ごとの生存確率の最大値 $3/4$ を使って全確率を評価する。

【解答】

(1)

時刻 1 の配置は

$$(B, B), (B, D), (B, F), (D, B), (D, D), (D, F)$$

の 6 通りである。うち $(B, B), (D, D)$ は時刻 1 で衝突する。

(2)

非衝突 4 配置のうち、同じ正方形上にあるものが 3 個、異なる正方形にあるものが 1 個なので

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

同じ正方形型の代表 (B, D) からは 6 通り中、次の同じ正方形型が 3 通り、異なる正方形型が 1 通りである。異なる正方形型の代表 (B, F) からは 4 通り中、それぞれ 2 通り、1 通りである。よって遷移行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\mathbf{v}_2 = M\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/8 \end{pmatrix}.$$

(3)

同じ分類はすべての時刻で保たれるため

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n.$$

(4)

行列の第 1 列の和は $2/3$ 、第 2 列の和は $3/4$ である。これは、現在が同じ正方形型なら次の 1 歩でも衝突しない確率が $2/3$ 、異なる正方形型なら $3/4$ であることを意味する。したがって条件付き生存確率は常に $3/4$ 以下であり、

$$p_{n+1} \leq \frac{3}{4}p_n.$$

$p_0 = 1$ から

$$p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

【総評】 難度 8、目安時間 30 分。図の欠落は状態分類そのものを分かりにくくするため、初期配置と時刻 1 の全 6 配置を実図で示した。非衝突で到達可能な配置は、偶数時刻と奇数時刻で頂点集合が入れ替わるが、各時刻とも「同じ正方形型 4 配置・異なる正方形型 2 配置」に整理できる。漸化式の係数には次の 1 歩で衝突する場合を含めない。 $a_2 = 1/3, b_2 = 1/8$ は直接列挙と行列計算の両方で検算でき、(4) は各型の 1 歩生存確率 $2/3, 3/4$ の最大値を使う。