

名古屋大学 2023 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数係数の 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ は相異なる複素数 $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を解に持ち、それらは全て複素数平面において、点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする。ただし、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ はそれぞれ α, β と共役な複素数を表す。

- (1) $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$ を示せ。
- (2) $t = \alpha + \bar{\alpha}, u = \beta + \bar{\beta}$ とおく。 p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ。
- (3) 座標平面において、点 (p, s) のとりうる範囲を図示せよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

円周条件 $|z - 1| = 1$ を展開すると、各共役対について「和=積」が得られる。すると 4 次式は $(x^2 - tx + t)(x^2 - ux + u)$ と分解でき、係数比較で p, q, r, s が出る。(3) は t, u がともに $0 < t, u < 4$ にあり、かつ $t \neq u$ であることから、 $p = t + u, s = tu$ の範囲を求める。相加相乗平均と $(4 - t)(4 - u) > 0$ が境界の式を与える。

【解答】

(1) α は点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるので $|\alpha - 1| = 1$ である。両辺を 2 乗すると $(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1) = 1$ である。展開して $\alpha\bar{\alpha} - \alpha - \bar{\alpha} + 1 = 1$ となるから $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$ である。

(2) $t = \alpha + \bar{\alpha}, u = \beta + \bar{\beta}$ とおく。(1) より $\alpha\bar{\alpha} = t, \beta\bar{\beta} = u$ である。したがって、4 次方程式の左辺は

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \bar{\beta}) = (x^2 - tx + t)(x^2 - ux + u)$$

と表される。展開すると

$$(x^2 - tx + t)(x^2 - ux + u) = x^4 - (t + u)x^3 + (tu + t + u)x^2 - 2tux + tu$$

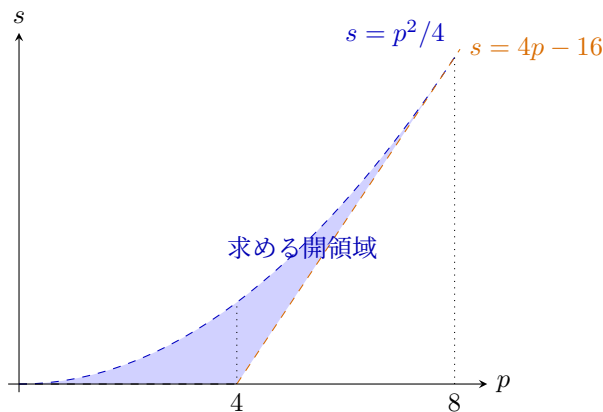
である。これを $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s$ と比較して $p = t + u, q = tu + t + u, r = 2tu, s = tu$ を得る。

(3) α が円 $|z - 1| = 1$ 上にあり、 $\alpha \neq \bar{\alpha}$ であるから、 α は実数ではない。円周上の点を $\alpha = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ と書くと、 $\sin \theta \neq 0$ であり、 $t = \alpha + \bar{\alpha} = 2 + 2 \cos \theta$ だから $0 < t < 4$ である。同様に $0 < u < 4$ である。また $t = u$ なら 2 つの 2 次式 $x^2 - tx + t, x^2 - ux + u$ が一致し、4 つの解が相異なることに反する。したがって $t \neq u$ である。 $p = t + u, s = tu$ より、まず $0 < p < 8, s > 0$ である。また相加相乗平均より $s = tu \leq \left(\frac{t + u}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$ であるが、 $t \neq u$ なので等号

は成り立たず $s < \frac{p^2}{4}$ である。

さらに $t < 4, u < 4$ より $(4 - t)(4 - u) > 0$ である。これを p, s で表すと $16 - 4(t + u) + tu > 0$ すなわち $s > 4p - 16$ である。

以上より、点 (p, s) のとりうる範囲は $0 < p < 8, \max(0, 4p - 16) < s < \frac{p^2}{4}$ である。したがって座標平面では、放物線 $s = p^2/4$ の下側、かつ $s = 0$ と $s = 4p - 16$ の上側にある開領域を図示すればよい。境界はすべて含まない。



▶ 別解（逆に 2 次方程式の根の範囲を課す）

【方針】

t, u は $z^2 - pz + s = 0$ の 2 根であると逆に見る。『相異なる 2 根がともに $(0, 4)$ にある』ための判別式・和・積・ $z = 4$ での符号条件を (p, s) の不等式に直し、必要十分性を確認する。

【解答】

(1) $|\alpha - 1| = 1$ を 2 乗すると

$$(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1) = 1,$$

したがって

$$\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}.$$

(2) $t = \alpha + \bar{\alpha}$, $u = \beta + \bar{\beta}$ とすれば

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - tx + t$$

であり、 β の組も同様である。よって展開・係数比較から

$$p = t + u, \quad q = tu + t + u, \quad r = 2tu, \quad s = tu.$$

(3) 円周上の非実数点について $0 < t < 4$, $0 < u < 4$ であり、4 根が相異なるので $t \neq u$ である。ここで t, u は

$$z^2 - pz + s = 0$$

の 2 根である。

相異なる実根である条件は

$$p^2 - 4s > 0,$$

両方が正である条件は $p > 0, s > 0$ である。また

$$(4 - t)(4 - u) = 16 - 4p + s > 0.$$

これと $p = t + u < 8$ を合わせれば、 t, u が両方 4 より大きい可能性は除かれ、両方とも 4 より小さい。逆にこれらの不等式を満たせば、2 根は相異なり $0 < t, u < 4$ となる。

したがって必要十分条件は

$$0 < p < 8, \quad s > 0, \quad s > 4p - 16, \quad s < \frac{p^2}{4}.$$

すなわち

$$\max(0, 4p - 16) < s < \frac{p^2}{4} \quad (0 < p < 8)$$

であり、境界はいずれも含まない。図示すると標準解法の図の開領域になる。

【総評】 目安時間は 20 分。円周条件から共役対の和と積が一致すること、非実数条件により $0 < t, u < 4$ となることが核である。相加相乗平均による順方向の導出と、 $z^2 - pz + s$ の 2 根を区間 $(0, 4)$ に入れる逆方向の判定で領域の必要十分性を確認し、開境界を図示した。

【第 2 問】

$0 < b < a$ とする。 xy 平面において、原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a, 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている。

- (1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。
- (2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。 P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。
- (3) 点 $Q(r, 0)$ と点 $R(a-b, 0)$ をとる。 D の内部にある C の弧 PQ , 線分 QR , および線分 RP で囲まれる図形を A とする。 xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし、答えに $h(r)$ を用いてもよい。
- (4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また、その r を $r(a)$ とおいたとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} (r(a) - a)$ を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

2 円が 2 点で交わる条件は中心間距離と半径の和・差で決まる。交点の x 座標は 2 つの円の方方程式を引いて求める。体積は、 $x = a - b$ から $x = h$ までは線分 RP の回転、 $x = h$ から $x = r$ までは円 C の弧の回転として分けて積分する。最大化は、得られた $V(r)$ に $h(r)$ を代入して因数分解し、 $a - b < r < a + b$ で微分係数の符号を読む。

【解答】

(1) 2 つの円の中心間距離は a であり、半径は r と b である。2 点で交わるためには、一方が他方の内部に接したり、外接したりせず、中心間距離が半径の差より大きく和より小さければよい。 $0 < b < a$ なので条件は $a - b < r < a + b$ である。

(2) 交点 (x, y) は $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ を満たす。2 式の差をとると $(x - a)^2 - x^2 = b^2 - r^2$ であり、 $-2ax + a^2 = b^2 - r^2$ となる。よって交点の x 座標は $h(r) = \frac{a^2 + r^2 - b^2}{2a}$ である。

(3) 以下 $h = h(r)$ と書く。 P は円 C 上の点なので $P = (h, \sqrt{r^2 - h^2})$ である。また $Q = (r, 0)$, $R = (a - b, 0)$ である。領域 A を x 軸のまわりに回転するので、断面半径の 2 乗を積分すればよい。

まず $a - b \leq x \leq h$ では、上側の境界は線分 RP である。直線 RP は $(a - b, 0)$ と $(h, \sqrt{r^2 - h^2})$ を通るから $y = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{h - a + b}(x - a + b)$ である。したがってこの部分の回転体積は

$$\pi \int_{a-b}^h \frac{r^2 - h^2}{(h - a + b)^2} (x - a + b)^2 dx$$

である。

次に $h \leq x \leq r$ では、上側の境界は円 C の弧であり $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ である。したがってこの部分の回転体積は

$$\pi \int_h^r (r^2 - x^2) dx$$

である。よって

$$V(r) = \pi \int_{a-b}^h \frac{r^2 - h^2}{(h - a + b)^2} (x - a + b)^2 dx + \pi \int_h^r (r^2 - x^2) dx$$

である。

第 1 項は

$$\pi \frac{r^2 - h^2}{(h - a + b)^2} \left[\frac{(x - a + b)^3}{3} \right]_{a-b}^h = \frac{\pi}{3} (r^2 - h^2)(h - a + b)$$

であり、第 2 項は $\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_h^r = \frac{\pi}{3} (2r^3 - 3r^2 h + h^3)$ である。したがって $V(r) = \frac{\pi}{3} \{ (r^2 - h^2)(h - a + b) + 2r^3 - 3r^2 h + h^3 \}$ である。

(4) (3) の式に $h = \frac{a^2 + r^2 - b^2}{2a}$ を代入して整理すると $V(r) = \frac{\pi(a + b - r)(r - a + b)^2(a^2 + 3ar - b^2 + br)}{12a^2}$ である。 $a - b < r < a + b$ で考える。

微分すると $V'(r) = \frac{\pi r(r - a + b)}{3a^2} \{ 3a^2 + 2ab + b^2 - (3a + b)r \}$ である。範囲内では $r > 0$, $r - a + b > 0$ なので、 $V'(r)$

の符号は $3a^2 + 2ab + b^2 - (3a + b)r$ で決まる。したがって $r = \frac{3a^2 + 2ab + b^2}{3a + b}$ を境に、 $V(r)$ は増加から減少に変わる。

この値が範囲内にあることを確認する。まず $\frac{3a^2 + 2ab + b^2}{3a + b} - (a - b) = \frac{2b(a + b)}{3a + b} > 0$ であり、また $a + b - \frac{3a^2 + 2ab + b^2}{3a + b} = \frac{2ab}{3a + b} > 0$ である。よってこの r は確かに $a - b < r < a + b$ にあり、最大値を与える。

したがって $r(a) = \frac{3a^2 + 2ab + b^2}{3a + b}$ である。このとき $r(a) - a = \frac{3a^2 + 2ab + b^2 - a(3a + b)}{3a + b} = \frac{b(a + b)}{3a + b}$ であるから $\lim_{a \rightarrow \infty} (r(a) - a) = \frac{b}{3}$ である。

▶ 別解 (円錐と球冠の体積)

【方針】

領域の回転体を、線分 RP が作る円錐と、弧 PQ が作る球冠に分ける。これにより (3) の積分を既知の体積公式で短く処理する。(4) は得られた因数分解式を微分し、定義域内で符号を決める。

【解答】

(1) 中心間距離が a 、半径が r, b なので、2 点で交わる条件は

$$|r - b| < a < r + b.$$

$0 < b < a$ を用いて整理すると

$$a - b < r < a + b.$$

(2) 2 円の方程式を引けば

$$-2ax + a^2 = b^2 - r^2,$$

よって

$$h(r) = \frac{a^2 + r^2 - b^2}{2a}.$$

(3) $h = h(r)$, $y_P = \sqrt{r^2 - h^2}$ とおく。 $a - b \leq x \leq h$ の部分を回転すると、頂点 R 、底面半径 y_P 、高さ $h - a + b$ の円錐になる。その体積は

$$V_1 = \frac{\pi}{3}(r^2 - h^2)(h - a + b).$$

$h \leq x \leq r$ の部分は、半径 r 、高さ $r - h$ の球冠である。球冠の体積公式 $\pi H^2(3r - H)/3$ に $H = r - h$ を代入して

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(r - h)^2(2r + h) = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3).$$

したがって

$$V(r) = \frac{\pi}{3}\{(r^2 - h^2)(h - a + b) + 2r^3 - 3r^2h + h^3\}.$$

(4) $h = (a^2 + r^2 - b^2)/(2a)$ を代入して整理すると

$$V(r) = \frac{\pi(a + b - r)(r - a + b)^2(a^2 + 3ar - b^2 + br)}{12a^2}.$$

微分すると

$$V'(r) = \frac{\pi r(r - a + b)}{3a^2}\{3a^2 + 2ab + b^2 - (3a + b)r\}.$$

定義域では前二因子が正なので、増加から減少へ変わるのは

$$r(a) = \frac{3a^2 + 2ab + b^2}{3a + b}$$

である。この値と両端との差は

$$r(a) - (a - b) = \frac{2b(a + b)}{3a + b} > 0, \quad a + b - r(a) = \frac{2ab}{3a + b} > 0$$

だから、確かに定義域内で最大を与える。最後に

$$r(a) - a = \frac{b(a + b)}{3a + b} \longrightarrow \frac{b}{3} \quad (a \rightarrow \infty).$$

【総評】 目安時間は 30 分。2 円の交点条件と交点座標は標準的だが、回転体を $x = h$ で分けることが山である。断面積分と『円錐+球冠』の 2 通りで体積式を確認した。最大点では微分係数の因子の符号と、候補が $(a - b, a + b)$ 内にあることを必ず示す。

【第 3 問】

- (1) 方程式 $e^x = \frac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。
 (2) $y = x(x^2 - 3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点の個数を求めよ。
 (3) a を正の実数とし、関数 $f(x) = x(x^2 - a)$ を考える。 $y = f(x)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は $x < 0$ で $t = -x > 0$ とおき、左辺減少・右辺増加の 1 交点に直す。(2)(3) は共有点条件 $e^x = x(x^2 - a)$ を $a = A(x) = x^2 - e^x/x$ に変形する。 $A'(x) = 0$ が (1) の方程式に一致することを使い、 $A(x)$ が $x < 0$ でただ 1 つの最小値をもつことを示す。 $a = 3$ の水平線との交点数、および最小値を与えるただ 1 つの a を読み取る。

【解答】

(1) 負の実数解を調べるので、 $x = -t$, $t > 0$ とおく。方程式は $e^{-t} = \frac{2(-t)^3}{-t-1} = \frac{2t^3}{t+1}$ となる。

左辺 e^{-t} は $t > 0$ で単調減少である。一方、右辺 $B(t) = \frac{2t^3}{t+1}$ は $B'(t) = \frac{2t^2(2t+3)}{(t+1)^2} > 0$ より単調増加である。また

$\lim_{t \rightarrow +0} e^{-t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{2t^3}{t+1} = 0$ であり、 $t = 1$ では $e^{-1} < 1 = \frac{2}{2}$ である。したがって 2 つのグラフは $t > 0$ でただ 1 回交わる。よって元の方程式の負の実数解の個数は 1 である。

(2) $x < 0$ において $e^x = x(x^2 - 3)$ は、両辺を x で割って $3 = x^2 - \frac{e^x}{x}$ と同値である。そこで $A(x) = x^2 - \frac{e^x}{x}$ ($x < 0$) とおく。

微分すると $A'(x) = 2x - \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ である。 $A'(x) = 0$ は $2x = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ すなわち $e^x = \frac{2x^3}{x-1}$ と同値である。(1) より、 $A'(x) = 0$ となる $x < 0$ はただ 1 つである。

さらに $\lim_{x \rightarrow -\infty} A(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} A(x) = \infty$ である。また $x \rightarrow -\infty$ では $A'(x) \sim 2x < 0$, $x \rightarrow -0$ では $A'(x) > 0$ となる。したがって $A(x)$ は $x < 0$ でただ 1 つの最小値をもつ。

ここで $A(-1) = 1 + e^{-1} < 3$ である。 $A(x)$ は両端で ∞ に発散し、途中で 3 より小さい値をとるので、水平線 $y = 3$ とは 2 点で交わる。よって $y = x(x^2 - 3)$ と $y = e^x$ の $x < 0$ における共有点の個数は 2 である。

(3) $x < 0$ において $e^x = x(x^2 - a)$ は $a = x^2 - \frac{e^x}{x} = A(x)$ と同値である。したがって、共有点の個数は、曲線 $y = A(x)$ と水平線 $y = a$ の交点数に等しい。

(2) で示したように、 $A(x)$ は $x < 0$ でただ 1 つの最小値をもつ。また $x < 0$ では $x^2 > 0$, $-\frac{e^x}{x} > 0$ なので $A(x) > 0$ である。したがって最小値を a_0 とおくと $a_0 > 0$ である。 $a = a_0$ のとき、水平線 $y = a$ は $y = A(x)$ に最小点で接するので、共有点は 1 個だけである。 $a > a_0$ では両端が ∞ であることから共有点は 2 個、 $0 < a < a_0$ では共有点はない。よって、条件を満たす正の実数 a はただ 1 つ存在する。

▶ 別解 (正の変数への置換と狭義凸性)

【方針】

$t = -x > 0$ と置く。(2)(3) の共有点条件は $a = F(t) = t^2 + e^{-t}/t$ となる。 $F''(t) > 0$ を直接示せば、 F は狭義凸で両端が無量大だから最小点はただ 1 つであり、水平線との交点数を即座に判定できる。

【解答】

(1) $x = -t$ ($t > 0$) とおくと方程式は

$$e^{-t} = \frac{2t^3}{t+1}.$$

左辺は狭義減少、右辺は

$$\left(\frac{2t^3}{t+1}\right)' = \frac{2t^2(2t+3)}{(t+1)^2} > 0$$

より狭義増加である。 $t \rightarrow +0$ では左辺が大きく、 $t = 1$ では右辺が大きいの、解はちょうど 1 個である。

(2) $x = -t$ とすると

$$e^x = x(x^2 - a) \iff a = F(t) := t^2 + \frac{e^{-t}}{t}, \quad t > 0.$$

微分すると

$$F''(t) = 2 + e^{-t} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3} \right) > 0.$$

したがって F は $t > 0$ で狭義凸である。また

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty.$$

よって F はただ 1 つの点で最小値 a_0 をとる。

$F(1) = 1 + e^{-1} < 3$ だから、水平線 $a = 3$ は最小値より上にあり、狭義凸なグラフと 2 点で交わる。したがって (2) の共有点は 2 個である。

(3) さらに $F(t) > 0$ より $a_0 > 0$ である。水平線 $a = a_0$ のときだけ接点 1 個、 $a > a_0$ なら 2 個、 $0 < a < a_0$ なら 0 個である。よって条件を満たす正の実数 a は a_0 ただ 1 つである。

【総評】 目安時間は 25 分。(1) は後続小問の停留点の一意性につながる誘導である。 $A(x) = x^2 - e^x/x$ の増減による方法と、 $t = -x$ 後の $F(t) = t^2 + e^{-t}/t$ の狭義凸性による方法で、(2) の 2 交点と (3) の正の a の一意性を確認した。両端の極限と最小値の正值性を省かない。

■ 【第 4 問】 ■

n を正の整数とし、 n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m x^m$ と表す。

(1) 等式 $\sum_{m=1}^n {}_nB_m = n!$ を示せ。

(2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^n ({}_nB_m \cdot {}_mC_0 + {}_nB_m \cdot {}_mC_1 x + \cdots + {}_nB_m \cdot {}_mC_m x^m)$$

を示せ。ただし、 ${}_mC_0, {}_mC_1, \dots, {}_mC_m$ は二項係数である。

(3) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、等式 $\sum_{j=k}^n {}_nB_j \cdot {}_jC_k = {}_{n+1}B_{k+1}$ を示せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は係数和なので $P_n(1)$ を計算する。(2) は $P_n(x) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m x^m$ に $x+1$ を代入し、二項定理で各 $(x+1)^m$ を展開する。(3) は (2) の x^k の係数を左辺として読み取り、一方で $P_n(x+1) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) = P_{n+1}(x)/x$ と書いて右辺の係数を読む。次数が 1 つずれるため ${}_{n+1}B_{k+1}$ になる点に注意する。

【解答】

(1) $P_n(x) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m x^m$ に $x=1$ を代入すると $P_n(1) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m$ である。一方、定義より $P_n(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ である。したがって $\sum_{m=1}^n {}_nB_m = n!$ が成り立つ。

(2) $P_n(x) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m x^m$ であるから、 x を $x+1$ に置き換えると $P_n(x+1) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m (x+1)^m$ である。二項定理より $(x+1)^m = {}_mC_0 + {}_mC_1 x + \cdots + {}_mC_m x^m$ なので

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m ({}_mC_0 + {}_mC_1 x + \cdots + {}_mC_m x^m)$$

である。これは問題の等式そのものである。

(3) (2) の右辺から x^k の係数を読む。 $(x+1)^j$ の中で x^k の係数は、 $j \geq k$ のとき ${}_jC_k$ 、 $j < k$ のとき 0 である。したがって x^k の係数は $\sum_{j=k}^n {}_nB_j \cdot {}_jC_k$ である。

一方、定義から $P_n(x+1) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ である。また $P_{n+1}(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ だから $P_n(x+1) = \frac{P_{n+1}(x)}{x}$ である。ここで $P_{n+1}(x) = \sum_{m=1}^{n+1} {}_{n+1}B_m x^m$ なので $\frac{P_{n+1}(x)}{x} = \sum_{m=1}^{n+1} {}_{n+1}B_m x^{m-1}$ である。この式の x^k の係数は、 $m-1=k$ 、すなわち $m=k+1$ に対応する ${}_{n+1}B_{k+1}$ である。

同じ整式 $P_n(x+1)$ の x^k の係数を比較して $\sum_{j=k}^n {}_nB_j \cdot {}_jC_k = {}_{n+1}B_{k+1}$ を得る。

▶ 別解 (導関数で係数を直接取り出す)

【方針】

整式の x^k の係数が k 階導関数の $x=0$ での値を $k!$ で割ったものになることを使う。 $P_n(x+1)$ を P_n の係数表示から微分した値と、 $P_{n+1}(x)/x$ の係数表示から読んだ値で比較する。

【解答】

(1)

$$\sum_{m=1}^n {}_nB_m = P_n(1) = 1 \cdot 2 \cdots n = n!.$$

(2) $P_n(x) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m x^m$ の両辺で x を $x+1$ に替えれば

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m (x+1)^m.$$

各項に二項定理を用いると、問題文の等式を得る。

(3) 整式 $F(x)$ の x^k の係数は $F^{(k)}(0)/k!$ である。 $F(x) = P_n(x+1)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^n {}_nB_j \frac{j!}{(j-k)!} \\ &= \sum_{j=k}^n {}_nB_j {}_jC_k. \end{aligned}$$

一方

$$F(x) = P_n(x+1) = \frac{P_{n+1}(x)}{x} = \sum_{m=1}^{n+1} {}_{n+1}B_m x^{m-1}.$$

この整式の x^k の係数は ${}_{n+1}B_{k+1}$ である。二つの係数表示を比較して

$$\sum_{j=k}^n {}_nB_j {}_jC_k = {}_{n+1}B_{k+1}$$

を得る。

【総評】 目安時間は 15 分。係数和への代入，二項展開，係数比較という誘導を正確に追う。標準の項別二項展開に加え， k 階導関数で x^k の係数を抽出する方法でも恒等式を確認した。 $P_n(x+1) = P_{n+1}(x)/x$ により添字が 1 つずれる点が最重要である。