

岡山大学 2016 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

p は素数とする. 正の整数 n に対し, p^d が n の約数となる整数 d ($d \geq 0$) のなかで最大のものを $f(n)$ とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $p = 3, n = (3^2)!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ.
- (2) $p = 5, n = (5^2)!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ.
- (3) m が正の整数で $n = (p^m)!$ のとき $f(n)$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$n!$ に含まれる素数 p の個数は, p の倍数, p^2 の倍数, p^3 の倍数, ... を数えて足せばよい. $(p^m)!$ では $p, p^2, \dots, p^m$ の倍数だけを数えればよく, 等比数列の和になる.

【解答】

(1) $3^2! = 9!$ に含まれる素因数 3 の個数を数える. $1, 2, \dots, 9$ の中で 3 の倍数は 3 個, 9 の倍数は 1 個である. したがって

$$f(9!) = 3 + 1 = 4$$

である.

(2) $5^2! = 25!$ に含まれる素因数 5 の個数を数える. $1, 2, \dots, 25$ の中で 5 の倍数は 5 個, 25 の倍数は 1 個である. したがって

$$f(25!) = 5 + 1 = 6$$

である.

(3) $n = (p^m)!$ とする. $(p^m)!$ に含まれる素因数 p の個数は, $1, 2, \dots, p^m$ の中で p の倍数の個数, p^2 の倍数の個数, ..., p^m の倍数の個数を足したものである.

p^k の倍数は p^{m-k} 個あるので,

$$f(n) = p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p + 1$$

である. 等比数列の和として

$$f(n) = \frac{p^m - 1}{p - 1}$$

である.

▶ 別解 (段階ごとの漸化式)

【方針】

(1)(2) は $(p^2)!$ に含まれる p を, 最初の 1 段と p の倍数に残る分に分けて数える。(3) は $E_m = f((p^m)!)とおき, 1 から p^m までの p の倍数から 1 個ずつ p を取り出して E_m の漸化式を作る。$

【解答】

(1) $1, 2, \dots, 9$ のうち 3 の倍数は 3, 6, 9 の 3 個で, それぞれ少なくとも 1 個の 3 をもつ。さらに $9 = 3 \cdot 3$ にはもう 1 個の 3 がある。したがって

$$f(9!) = 3 + 1 = 4.$$

(2) 同様に, $1, 2, \dots, 25$ のうち 5 の倍数は 5 個で, $25 = 5 \cdot 5$ にだけもう 1 個の 5 がある。よって

$$f(25!) = 5 + 1 = 6.$$

(3) $E_m = f((p^m)!)とおく。1 から p^m までのうち, p の倍数は$

$$p, 2p, 3p, \dots, p^{m-1}p$$

の p^{m-1} 個である。それぞれからまず 1 個ずつ p を取り出すと, 残る積は $(p^{m-1})!$ である。したがって

$$E_m = p^{m-1} + E_{m-1}.$$

また $E_1 = f(p!) = 1$ である。これを順に用いると

$$\begin{aligned} E_m &= p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p + 1 \\ &= \frac{p^m - 1}{p - 1}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(n) = \frac{p^m - 1}{p - 1}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 4。想定時間は 14 分程度。優先度は「必ず完答したい」。(1)(2) は倍数の個数を数える標準計算で, p^2 の倍数をもう一度数えることが採点上の基本点になる。差がつく (3) では, p^k の倍数が p^{m-k} 個あることを明記するか, $E_m = p^{m-1} + E_{m-1}$ を立てる。公式名だけで済ませず, なぜ重複して数えるかを一文で説明したい。

■ 【第 2 問】 ■

関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき, $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は微分して極大値・極小値の符号を見る。(2) は $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = 2\cos 3\theta$ を使う。(3) は $a = \cos(5\pi/9)$ が $(-1/2, 1/2)$ にある根であることと, その区間で f が単調減少であることから, $-1/5$ と $-1/6$ での符号を比べる。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 24x^2 - 6 = 6(2x - 1)(2x + 1)$$

である。したがって $x = -\frac{1}{2}$ で極大, $x = \frac{1}{2}$ で極小となる。

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

である。また $x \rightarrow -\infty$ で $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ で $f(x) \rightarrow \infty$ である。よってグラフは x 軸と 3 回交わる。したがって $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3 個である。

(2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とする。三倍角の公式より

$$8a^3 - 6a = 2(4a^3 - 3a) = 2 \cos \frac{5\pi}{3}$$

である。 $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ だから

$$f(a) = 8a^3 - 6a - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

である。

(3) $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3}$ であるから

$$-\frac{1}{2} < \cos \frac{5\pi}{9} < 0$$

である。この区間では $f'(x) = 24x^2 - 6 < 0$ となるので、 $f(x)$ は単調減少である。

ここで

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 8\left(-\frac{1}{125}\right) - 6\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = \frac{17}{125} > 0$$

であり、

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = 8\left(-\frac{1}{216}\right) - 6\left(-\frac{1}{6}\right) - 1 = -\frac{1}{27} < 0$$

である。(2) より $f\left(\cos \frac{5\pi}{9}\right) = 0$ であり、 f はこの区間で単調減少だから

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

である。

▶ 別解 (三倍角から 3 つの根を特定する)

【方針】

(1) は根が $(-1, 1)$ にあることを確認して $x = \cos \theta$ とおき、三倍角の公式から 3 根を直接求める。(2) はその根の 1 つであることを読む。(3) は 3 根の位置関係で対象の根を特定し、両端での符号から挟む。

【解答】

(1) $x \geq 1$ では $f(1) = 1$ かつ $f'(x) > 0$ なので根はなく、 $x \leq -1$ でも $f(-1) = -3$ かつ $f'(x) > 0$ なので根はない。したがって根を求めるときは $-1 < x < 1$ としてよい。

$x = \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とおく。三倍角の公式から

$$f(x) = 2 \cos 3\theta - 1$$

である。よって $f(x) = 0$ は $\cos 3\theta = 1/2$ と同値であり、 $0 < 3\theta < 3\pi$ における解は

$$3\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3}, \quad \frac{7\pi}{3}.$$

したがって 3 つの実数解は

$$x = \cos \frac{\pi}{9}, \quad \cos \frac{5\pi}{9}, \quad \cos \frac{7\pi}{9}$$

であり、個数は 3 個である。

(2) $a = \cos(5\pi/9)$ は (1) で得た根の 1 つだから

$$f(a) = 0.$$

(3) $5\pi/9$ は $\pi/2$ と $2\pi/3$ の間なので、

$$-\frac{1}{2} < a < 0.$$

(1) の 3 根のうちこの区間にあるものは a だけである。一方,

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{17}{125} > 0, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{27} < 0.$$

連続性より区間 $(-1/5, -1/6)$ に根があり, その区間は $(-1/2, 0)$ に含まれる。そこにある根は a だけだから

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 16 分程度。優先度は「完答を狙う」。(1) の極大・極小の符号, (2) の三倍角公式は必須得点である。差がつく (3) では小数近似を使わず, 対象の根が $(-1/2, 0)$ にあること, その区間での一意性, $-1/5$ と $-1/6$ における符号を順に示す。符号だけを書いて単調性または根の一意性を落とさないことが採点上重要である。

【第 3 問】

a は正の数とし, 次の関数 $y = f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x) = axe^{-x/a} \quad (x \geq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) a が区間 $1 \leq a \leq 2$ 全体を動くとき, 点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。
- (3) $x \geq 0$ における曲線 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ と (2) の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず $f'_a(x)$, $f''_a(x)$ を求めて変曲点を出す。変曲点の軌跡は $x = 2a$ から a を消去して放物線の一部にする。面積は, 3 曲線の交点が $(0, 0)$, $x = 2$, $x = 4$ であることを確認し, $[0, 2]$ では $f_2 - f_1$, $[2, 4]$ では $f_2 - C$ を積分する。

【解答】

(1)

$$f_a(x) = axe^{-x/a}$$

より

$$f'_a(x) = (a - x)e^{-x/a}$$

であり, さらに

$$f''_a(x) = \left(\frac{x}{a} - 2\right)e^{-x/a}$$

である。 $e^{-x/a} > 0$ だから, 変曲点では $\frac{x}{a} - 2 = 0$, すなわち $x = 2a$ である。したがって

$$y = f_a(2a) = a \cdot 2a \cdot e^{-2} = \frac{2a^2}{e^2}$$

であり, 点 P の座標は

$$\left(2a, \frac{2a^2}{e^2}\right)$$

である。

(2) (1) より $x = 2a$, $y = \frac{2a^2}{e^2}$ である。 $a = \frac{x}{2}$ を代入して

$$y = \frac{x^2}{2e^2}$$

を得る。また $1 \leq a \leq 2$ だから

$$2 \leq x \leq 4$$

である。したがって曲線 C は、放物線 $y = \frac{x^2}{2e^2}$ のうち $2 \leq x \leq 4$ の部分である。端点は

$$\left(2, \frac{2}{e^2}\right), \quad \left(4, \frac{8}{e^2}\right)$$

である。

(3) $f_1(x) = xe^{-x}$, $f_2(x) = 2xe^{-x/2}$ である。 $x = 0$ で $f_1(x) = f_2(x) = 0$ である。また (2) の曲線 C は、 $x = 2$ で f_1 と交わり、 $x = 4$ で f_2 と交わる。実際、

$$f_1(2) = \frac{2}{e^2}, \quad f_2(4) = \frac{8}{e^2}$$

である。

したがって囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_0^2 \{2xe^{-x/2} - xe^{-x}\} dx + \int_2^4 \left\{2xe^{-x/2} - \frac{x^2}{2e^2}\right\} dx$$

である。

$$\int 2xe^{-x/2} dx = -4(x+2)e^{-x/2}, \quad \int xe^{-x} dx = -(x+1)e^{-x}$$

であるから

$$\int_0^2 \{2xe^{-x/2} - xe^{-x}\} dx = 7 - \frac{16}{e} + \frac{3}{e^2}$$

である。また

$$\int_2^4 \left\{2xe^{-x/2} - \frac{x^2}{2e^2}\right\} dx = \frac{16}{e} - \frac{100}{3e^2}$$

である。よって

$$S = 7 - \frac{91}{3e^2}$$

である。

▶ 別解 (相似なグラフと面積の一括差し引き)

【方針】

(1)(2) は $g(t) = te^{-t}$ とおいて $f_a(x) = a^2g(x/a)$ と見れば、全グラフが横に a 倍、縦に a^2 倍された形だと分かる。(3) は上側の f_2 の下の面積から、 $[0, 2]$ の f_1 の下と $[2, 4]$ の C の下をまとめて引く。

【解答】

(1) $g(t) = te^{-t}$ とおくと

$$f_a(x) = a^2g\left(\frac{x}{a}\right).$$

ここで

$$g''(t) = (t-2)e^{-t}$$

であり、 $e^{-t} > 0$ だから g の凹凸が変わるのは $t = 2$ である。したがって $x/a = 2$ 、すなわち $x = 2a$ で凹凸が変わり、

$$P = \left(2a, \frac{2a^2}{e^2}\right).$$

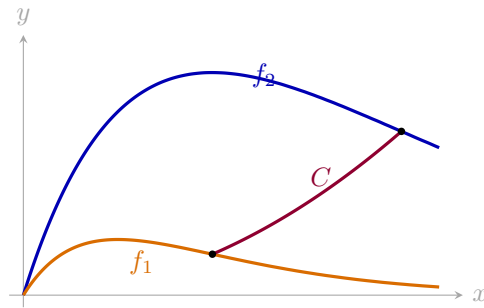
(2) $x = 2a$ から $a = x/2$ を消去すると

$$y = \frac{x^2}{2e^2}, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

したがって C は上に開く放物線のこの部分で、端点は

$$\left(2, \frac{2}{e^2}\right), \quad \left(4, \frac{8}{e^2}\right)$$

である。3 曲線の位置関係は次のようになる。



(3) $0 < x \leq 2$ では

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 2e^{x/2} > 1.$$

また $2 \leq x \leq 4$ では $e^{2-x/2} \geq 1$ かつ $x \leq 4$ だから

$$4e^{2-x/2} \geq 4 \geq x,$$

すなわち $f_2(x) \geq x^2/(2e^2)$ である。よって囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_0^4 f_2(x) dx - \int_0^2 f_1(x) dx - \int_2^4 \frac{x^2}{2e^2} dx.$$

各項は

$$\begin{aligned} \int_0^4 2xe^{-x/2} dx &= 8 - \frac{24}{e^2}, \\ \int_0^2 xe^{-x} dx &= 1 - \frac{3}{e^2}, \quad \int_2^4 \frac{x^2}{2e^2} dx = \frac{28}{3e^2}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= 8 - \frac{24}{e^2} - \left(1 - \frac{3}{e^2}\right) - \frac{28}{3e^2} \\ &= 7 - \frac{91}{3e^2}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7, 計算量 7. 想定時間は 25 分程度。優先度は「(1)(2) は必須, (3) が合否を分ける」。変曲点と軌跡は標準処理なので確実に取りたい。差がつくのは 3 曲線の接続を図で把握し, 下側が $x = 2$ で f_1 から C に替わると判断する点である。採点上は交点, 曲線の上下, 積分区間を式の前に示し, 指数関数の原始関数を一度明記する。計算時間が足りなければ正しい面積の積分式まで残す。

【第 4 問】

座標空間内に、原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0,0,1)$, $B(0,0,-1)$ がある。 O と異なる点 $P(s,t,0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u,v,0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u,v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で、原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 AP と球面の交点、直線 BQ と xy 平面の交点を順にパラメータ表示で計算し、 $R = (s,t,0)/(s^2+t^2)$ を得る。(3) では、原点を通らない直線を $ax+by=1$ と書き、(2) の関係を代入して円の方程式に変形する。

【解答】

(1) $\rho^2 = s^2 + t^2$ とおく。 $P \neq O$ より $\rho > 0$ である。直線 AP 上の点は

$$(\lambda s, \lambda t, 1 - \lambda)$$

と表せる。球面 S との交点条件は

$$\lambda^2(s^2 + t^2) + (1 - \lambda)^2 = 1$$

であり、 A と異なる交点では

$$\lambda = \frac{2}{\rho^2 + 1}$$

である。よって

$$Q = \left(\frac{2s}{\rho^2 + 1}, \frac{2t}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \right)$$

である。

直線 BQ 上の点を $B + \mu(Q - B)$ と表すと、 $z = 0$ となるのは

$$\mu = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho^2}$$

のときである。したがって

$$R = \left(\frac{s}{\rho^2}, \frac{t}{\rho^2}, 0 \right)$$

である。ゆえに

$$OR = \frac{1}{\rho}$$

となり、

$$OP \cdot OR = 1$$

である。

(2) (1) より

$$u = \frac{s}{s^2 + t^2}, \quad v = \frac{t}{s^2 + t^2}$$

である。したがって

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{s^2 + t^2}$$

であり、

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

である。

(3) 直線 l は原点を通らないので, ある実数 a, b を用いて

$$ax + by = 1$$

と表せる。ただし $a^2 + b^2 \neq 0$ である。点 $P(s, t, 0)$ がこの直線上にあるから

$$as + bt = 1$$

である。(1) から同様に

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad t = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

であるため, 代入して

$$\frac{au + bv}{u^2 + v^2} = 1$$

を得る。すなわち

$$u^2 + v^2 = au + bv$$

である。平方完成すると

$$\left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

となる。これは同一円周を表すので, 対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にある。

▶ 別解 (極座標で半径の逆数を捉える)

【方針】

(1) P を r と偏角 θ で表し, z 軸とその方向を含む断面内で R の半径が $1/r$ になることを示す。(2) は極座標の成分から s を逆算する。(3) は原点を通らない直線を $ax + by = 1$ と表し, 円の方程式へ変形する。

【解答】

(1) $r = OP > 0$ とし,

$$P = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

と表す。 z 軸と偏角 θ の方向を含む平面で見ると, 球面 S は単位円であり, 点は

$$A = (0, 1), \quad B = (0, -1), \quad P = (r, 0)$$

と表される。直線 AP と単位円の A でない交点は

$$Q = \left(\frac{2r}{r^2 + 1}, \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right).$$

さらに B, Q, R が一直線上にあり, R の高さは 0 なので, その水平方向の座標は

$$\frac{2r}{r^2 + 1} \cdot \frac{r^2 + 1}{2r^2} = \frac{1}{r}.$$

よって 3 次元の座標へ戻すと

$$R = \left(\frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sin \theta}{r}, 0 \right).$$

したがって $OR = 1/r$ であり,

$$OP \cdot OR = 1.$$

(2) 上式から

$$u = \frac{\cos \theta}{r}, \quad v = \frac{\sin \theta}{r}, \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}.$$

一方, $s = r \cos \theta$ だから

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

(3) l は原点を通らないから, ある実数 a, b により

$$l : ax + by = 1 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

と表せる。(1) と同様に $t = v/(u^2 + v^2)$ も成り立つので, $as + bt = 1$ へ代入して

$$u^2 + v^2 = au + bv$$

を得る。平方完成すると

$$\left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

右辺は正であり, これは l によって一意に定まる円周である。

【総評】 難度 6, 計算量 5。想定時間は 20 分程度。優先度は「(1)(2) を確保し, (3) で差をつける」。最も重要なのは $R = (s, t)/(s^2 + t^2)$ を導く計算であり, 交点の選択と $P \neq O$ の確認まで答案に残す。(3) では任意の原点を通らない直線を $ax + by = 1$ と正規化できる理由, 逆の成分式, 平方完成の 3 段階が採点点になる。