

入 学 試 験 問 題

数 学



岡 山 大 学 2024 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

m, n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ．
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ．
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ．

第 2 問

数直線上を動く点 P がある．点 P は，原点 O を出発して，1 枚のコインを 1 回投げごとに，表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする．コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする．コインを 10 回投げるとき，以下の問いに答えよ．

- (1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ．
- (2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ．
- (3) $0 \leq x_n \leq 3 (n = 1, 2, \dots, 9)$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ．

第 3 問

四面体 $OABC$ において, $OA = OB = OC = 1$ とし, $\angle COA = \alpha, \angle COB = \beta, \angle AOB = \gamma$ とする. ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする. 辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直になるようにとり, 辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CE}$ が垂直になるようにとる. $\angle DCE = \theta$ とし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}, \vec{c}, \cos \alpha$ を用いて表せ. また, $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{b}, \vec{c}, \cos \beta$ を用いて表せ.
- (2) $\cos \theta$ を $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \cos \gamma$ を用いて表せ.
- (3) $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta, \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ とする. 点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき, $CP = \frac{1}{\tan \gamma}$ となることを示せ.

第 4 問

座標平面上で、線分 $S: x + y = 1 (0 \leq x \leq 1)$ と曲線 $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で囲まれた図形 D を考える. S 上に点 $(0, 1)$ からの距離が t となる点 P をとる. このとき, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ である. また, 点 P を通り, 直線 $x + y = 1$ と垂直に交わる直線を l とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ.
- (2) 直線 l と曲線 C の交点を Q とする. 線分 PQ の長さを t を用いて表せ.
- (3) 図形 D を直線 $x + y = 1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)