

岡山大学 2024 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$X = x^3$ と置く因数分解から周期 3 を作り、割る式を 0 とみなして余りを 1 次以下へ落とす。(3) では $x^2 - x + 1$ から $x^3 = -1$ 、 $x^6 = 1$ を得て指数を 6 で整理する。

【解答】

(1) $X = x^3$ とおくと

$$x^{3m} - 1 = X^m - 1 = (X - 1)(X^{m-1} + X^{m-2} + \cdots + X + 1)$$

である。したがって $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れる。

(2) $x^2 + x + 1 = 0$ とみなして余りを考えると、 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ より x^3 の余りは 1 である。よって n を 3 で割った余りで分ければよい。

n を 3 で割った余り	$x^n - 1$ の余り
0	0
1	$x - 1$
2	$x^2 - 1 = -x - 2$

したがって余りは、 $n \equiv 0$ のとき 0、 $n \equiv 1$ のとき $x - 1$ 、 $n \equiv 2$ のとき $-x - 2$ である。

(3) $x^2 - x + 1 = 0$ とみなすと、 $x^2 = x - 1$ であるから

$$x^3 = x(x - 1) = x^2 - x = -1$$

である。したがって x^6 の余りは 1 である。 $2024 = 6 \cdot 337 + 2$ より

$$x^{2024} - 1$$

の余りは $x^2 - 1$ の余りに等しい。 $x^2 = x - 1$ を用いて

$$x^2 - 1 = x - 2$$

であるから、求める余りは $x - 2$ である。

▶ 解法 2 (1 の累乗根で余りを決定)

【方針】

2 次式の 2 つの複素根で、余り $R(x) = ax + b$ の値が元の多項式と一致することを用いる。根の累乗の周期から場合分けし、2 点で一致する 1 次式を特定する。

【解答】

(1) x^3 を一つの文字とみれば

$$x^{3m} - 1 = (x^3)^m - 1 = (x^3 - 1)\{x^{3(m-1)} + x^{3(m-2)} + \cdots + x^3 + 1\}.$$

よって $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れる。

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす複素数 ω をとる。 $\omega^3 = 1$ かつ $\omega \neq 1$ で、 $x^2 + x + 1$ の 2 根は ω, ω^2 である。

$x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを $R(x)$ とする。 R は 1 次以下であり、

$$R(\omega) = \omega^n - 1, \quad R(\omega^2) = \omega^{2n} - 1$$

を満たす。 n を 3 で割った余りごとに調べる。

$n \pmod{3}$	$R(\omega)$	$R(\omega^2)$	$R(x)$
0	0	0	0
1	$\omega - 1$	$\omega^2 - 1$	$x - 1$
2	$\omega^2 - 1$	$\omega - 1$	$-x - 2$

最後の行では $\omega^2 = -\omega - 1$ より $\omega^2 - 1 = -\omega - 2$ を用いた。2 つの異なる点で値が一致する 1 次式は一意なので、

$$\begin{cases} 0 & (n \equiv 0 \pmod{3}), \\ x - 1 & (n \equiv 1 \pmod{3}), \\ -x - 2 & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

が求める余りである。

(3) $x^2 - x + 1 = 0$ の根を ζ とすると

$$\zeta^2 = \zeta - 1, \quad \zeta^3 = -1, \quad \zeta^6 = 1.$$

$2024 \equiv 2 \pmod{6}$ なので

$$\zeta^{2024} - 1 = \zeta^2 - 1 = \zeta - 2.$$

もう一つの根についても同じ等式が成り立つ。したがって、余りは 1 次以下であることから一意に

$$x - 2$$

と定まる。

【総評】 難度 4、計算量 3、想定 10 分。標準解法では商環の周期、別解では 2 つの複素根で余りを補間する。(2) は $n \pmod{3}$ 、(3) は $2024 \pmod{6}$ を使い分ける。両解法で (2) の 3 場合と (3) の余り $x - 2$ が一致した。

【第 2 問】

数直線上を動く点 P がある。点 P は、原点 O を出発して、1 枚のコインを 1 回投げるとき、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし、コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $0 \leq x_n \leq 3 (n = 1, 2, \dots, 9)$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1)(2) は表の回数で数え、(2) は $x_5 = 1$ を余事象として引く。(3) は時刻と位置を状態にし、区間 $0 \leq x_n \leq 3$ から出る経路をその時点で捨てる。

【解答】

(1) $x_{10} = 0$ となるには、10 回のうち表が 5 回、裏が 5 回出ればよい。したがって求める確率は

$$\frac{{}_{10}C_5}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

である。

(2) まず $x_{10} = 0$ となる列は ${}_{10}C_5 = 252$ 通りである。このうち $x_5 = 1$ となるには、最初の 5 回で表が 3 回、裏が 2 回出て、残り 5 回で表が 2 回、裏が 3 回出ればよい。したがってそのような列は

$${}_5C_3 {}_5C_2 = 100$$

通りである。よって求める確率は

$$\frac{252 - 100}{2^{10}} = \frac{152}{1024} = \frac{19}{128}$$

である。

(3) 時刻 n に座標 j にいる経路数を数える。ただし途中では $0 \leq j \leq 3$ のものだけを残す。各時刻の経路数は次のようになる。

n	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	2	0	1
4	2	0	3	0
5	0	5	0	3
6	5	0	8	0
7	0	13	0	8
8	13	0	21	0
9	0	34	0	21

最後に $x_{10} = 0$ となるには、時刻 9 で $j = 1$ にいる 34 通りから裏が出ればよい。したがって求める確率は

$$\frac{34}{2^{10}} = \frac{17}{512}$$

である。

▶ 解法 2 (2 歩ごとの漸化式)

【方針】

偶数時刻には位置が偶数なので、許される状態は $0, 2$ だけになる。 2 回の投擲を 1 組とし、位置 $0, 2$ 間の遷移数を数える 2 状態の漸化式で、 10 歩後に原点へ戻る経路数を求める。

【解答】

(1) 10 回後に原点へ戻るには表と裏が 5 回ずつ必要である。全事象は 2^{10} 通りなので

$$\frac{{}_{10}C_5}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}.$$

(2) $x_{10} = 0$ となる 252 通りのうち、 $x_5 = 1$ となるものを除く。最初の 5 回は表 3 回、後半の 5 回は表 2 回であるから、除く経路数は

$${}_5C_3 {}_5C_2 = 100.$$

よって

$$\frac{252 - 100}{2^{10}} = \frac{19}{128}.$$

(3) 条件を満たし、 $2k$ 回後に位置 $0, 2$ にいる経路数をそれぞれ a_k, b_k とする。奇数時刻の位置は $1, 3$ だけなので、 2 歩を一組にすればこの 2 状態で閉じる。

位置 0 からは

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

が各 1 通りである。位置 2 から位置 0 へは

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

の 1 通り、位置 2 へ戻るのは

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$$

の 2 通りである。したがって

$$a_{k+1} = a_k + b_k, \quad b_{k+1} = a_k + 2b_k.$$

初期値は $(a_0, b_0) = (1, 0)$ であり、

k	0	1	2	3	4	5
a_k	1	1	2	5	13	34
b_k	0	1	3	8	21	55

となる。よって 10 回後に原点へ戻る有効経路は 34 通りで、求める確率は

$$\frac{34}{2^{10}} = \frac{17}{512}.$$

各 2 歩遷移の中間点も $0 \leq x_n \leq 3$ に収まるものだけを列挙しているので、途中条件も満たしている。

【総評】 難度 6 、計算量 5 、想定 16 分。理系第 2 問の上限は 3 であり、文系第 2 問の上限 2 とは別問題である。 1 歩ごとの動的計画法と 2 歩ごとの 2 状態漸化式で有効経路 34 通りを独立に確認し、確率 $17/512$ が一致した。

【第 3 問】

四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 1$ とし、 $\angle COA = \alpha, \angle COB = \beta, \angle AOB = \gamma$ とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直になるようにとり、辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CE}$ が垂直になるようにとり、 $\angle DCE = \theta$ とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}, \vec{c}, \cos \alpha$ を用いて表せ。また、 $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{b}, \vec{c}, \cos \beta$ を用いて表せ。
- (2) $\cos \theta$ を $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \cos \gamma$ を用いて表せ。
- (3) $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta, \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき、 $CP = \frac{1}{\tan \gamma}$ となることを示せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

直線 OA, OB 上の点を実数倍で表し、 OC との直交条件から CD, CE を決める。後半は平面 $DOE = OAB$ を座標平面に置き、 C の平面外成分を計算する。

【解答】

(1) 点 D は辺 OA の延長上にあるから、 $\overrightarrow{OD} = s\vec{a}$ とおける。すると

$$\overrightarrow{CD} = s\vec{a} - \vec{c}$$

である。 $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{CD}$ より

$$\vec{c} \cdot (s\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

である。 $|\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{c} = \cos \alpha$ だから

$$s \cos \alpha - 1 = 0$$

となり、 $s = \frac{1}{\cos \alpha}$ である。よって

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{\cos \alpha} \vec{a} - \vec{c}$$

である。同様に

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{\cos \beta} \vec{b} - \vec{c}$$

である。

(2) (1) より

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\cos \alpha} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\cos \beta} + \vec{c} \cdot \vec{c}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} - 1 = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

である。また

$$|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \tan^2 \alpha, \quad |\overrightarrow{CE}|^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \tan^2 \beta$$

である。 $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ より長さは正だから、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{CE}|} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

である。

(3) 点 D, E はそれぞれ直線 OA, OB 上にあるので、平面 DOE は平面 OAB と同じである。平面 OAB を xy 平面とし、

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \quad \vec{b} = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$$

とおく。 $\vec{c} = (u, v, w)$ とすると、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \cos \alpha$ より

$$u = \cos \alpha$$

である。また $\vec{b} \cdot \vec{c} = \cos \beta$ より

$$u \cos \gamma + v \sin \gamma = \cos \beta$$

である。 $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ を用いると

$$v = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{\cos \beta \sin^2 \alpha}{\sin \gamma}$$

である。さらに $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ だから $\cos \beta = \sin \alpha$ であり、

$$u = \cos \alpha, \quad v = \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \gamma}$$

となる。

$|\vec{c}| = 1$ なので、点 C から平面 OAB までの距離は

$$CP = |w| = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

である。ここで $\cos \gamma = \sin \alpha \cos \alpha > 0$ であるから

$$\begin{aligned} CP^2 &= 1 - \cos^2 \alpha - \frac{\sin^6 \alpha}{\sin^2 \gamma} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \gamma - \sin^4 \alpha)}{\sin^2 \gamma} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} \\ &= \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} \end{aligned}$$

である。よって

$$CP = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{1}{\tan \gamma}$$

である。

▶ 解法 2 (直角三角形と四面体の体積)

【方針】

前半の内積計算で $CD = \tan \alpha$, $CE = \tan \beta$ も得る。条件から $CD \perp CE$ となるため、四面体 $CDEO$ を底面 CDE と底面 ODE の 2 通りで表し、同じ体積を等置して CP を求める。

【解答】

(1) D は OA の延長上にあるから $\overrightarrow{OD} = s\vec{a}$ と書ける。 $OC \perp CD$ より

$$\vec{c} \cdot (s\vec{a} - \vec{c}) = 0,$$

すなわち $s \cos \alpha = 1$ である。よって

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{\cos \alpha} \vec{a} - \vec{c}.$$

同様に

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{\cos \beta} \vec{b} - \vec{c}.$$

(2) 内積を計算すると

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

また $\triangle OCD, \triangle OCE$ は C で直角で、

$$OD = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad OC = 1, \quad OE = \frac{1}{\cos \beta}$$

だから

$$CD = \tan \alpha, \quad CE = \tan \beta.$$

したがって

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}}{CD \cdot CE} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

(3) 条件 $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ を (2) へ代入すると

$$\cos \theta = 0.$$

$0 < \theta < \pi$ より $\theta = \pi/2$ で、 $CD \perp CE$ である。さらに OC は CD, CE の両方に垂直だから、 OC は平面 CDE に垂直である。

四面体 $CDEO$ の体積を、底面を CDE として求める。 $OC = 1$ 、 $\beta = \pi/2 - \alpha$ より

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CD \cdot CE \cdot OC \\ &= \frac{1}{6} \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{1}$$

一方、 D, E はそれぞれ直線 OA, OB 上にあるので $\angle DOE = \gamma$ であり、

$$OD = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad OE = \frac{1}{\cos \beta}.$$

したがって

$$\begin{aligned} [\triangle ODE] &= \frac{1}{2} OD \cdot OE \sin \gamma \\ &= \frac{\sin \gamma}{2 \cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{2} \tan \gamma. \end{aligned}$$

最後の等号では $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ を用いた。底面を ODE 、高さを CP として同じ四面体の体積を表すと

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \tan \gamma \cdot CP = \frac{CP \tan \gamma}{6}. \tag{2}$$

(1),(2) を等置して

$$CP = \frac{1}{\tan \gamma}.$$

$0 < \gamma < \pi/2$ は $\cos \gamma = \sin \alpha \cos \alpha > 0$ から従うので、右辺は正の長さとして整合する。

【総評】 難度 7、計算量 7、想定 25 分。 $CD = \tan \alpha, CE = \tan \beta$ まで把握すると図形関係が明瞭になる。座標解法は平面外成分、別解は同じ四面体を 2 つの底面で測る。両者から $CP = 1/\tan \gamma$ が一致し、符号条件も確認した。

【第 4 問】

座標平面上で、線分 $S: x + y = 1 (0 \leq x \leq 1)$ と曲線 $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で囲まれた図形 D を考える。 S 上に点 $(0, 1)$ からの距離が t となる点 P をとる。このとき、 $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。また、点 P を通り、直線 $x + y = 1$ と垂直に交わる直線を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ。
- (2) 直線 l と曲線 C の交点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。
- (3) 図形 D を直線 $x + y = 1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

点 P を軸上の距離 t で表し、 $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ で曲線条件と垂線条件を一次化する。 PQ を回転半径として円板法で積分する。

【解答】

(1) 線分 S 上で $(0, 1)$ から距離 t の点は

$$P = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

である。直線 $x + y = 1$ の傾きは -1 なので、これに垂直な直線 l の傾きは 1 である。よって

$$y - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) = x - \frac{t}{\sqrt{2}}$$

すなわち

$$y = x + 1 - \sqrt{2}t$$

である。

(2) $d = 1 - \sqrt{2}t$ とおくと、直線 l は $y - x = d$ である。曲線 C 上の点 $Q = (x, y)$ に対し、 $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ とおくと

$$u + v = 1, \quad y - x = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u) = v - u$$

である。したがって $v - u = d$ であり、

$$x + y = u^2 + v^2 = \frac{1 + d^2}{2}$$

となる。直線 l は S に垂直であるから、

$$PQ = \frac{1 - (x + y)}{\sqrt{2}} = \frac{1 - d^2}{2\sqrt{2}}$$

である。 $d = 1 - \sqrt{2}t$ を代入して

$$PQ = t - \frac{t^2}{\sqrt{2}}$$

である。

(3) 軸 $x + y = 1$ に垂直な断面は半径 PQ の円である。したがって求める体積は

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(t - \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right)^2 dt$$

である。計算すると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(t^2 - \sqrt{2}t^3 + \frac{t^4}{2} \right) dt \\ &= \pi \left[\frac{t^3}{3} - \frac{\sqrt{2}t^4}{4} + \frac{t^5}{10} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{15} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2 (曲線の媒介変数)

【方針】

$p = \sqrt{x}$ で曲線 C を $(p^2, (1-p)^2)$ と媒介表示する。曲線上の点から回転軸への垂線の足までの軸方向距離 t と垂直距離 PQ を p で直接表し、 p を積分変数にする。

【解答】

(1) S の $(0, 1)$ から $(1, 0)$ への単位方向ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

なので

$$P = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

S に垂直な直線の傾きは 1 であるから

$$l: y = x + 1 - \sqrt{2}t.$$

(2) 曲線 C 上で $p = \sqrt{x}$ とおくと $0 \leq p \leq 1$ で、

$$Q = (p^2, (1-p)^2)$$

と媒介表示できる。

点 $Q = (x, y)$ から直線 $x + y = 1$ へ下ろした垂線の足を P とすると、 $(0, 1)$ から P までの軸方向の符号つき距離は

$$t = \frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}.$$

ここに $x = p^2, y = (1-p)^2$ を代入して

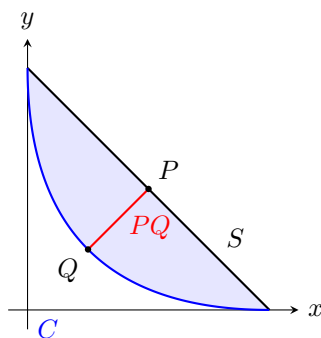
$$t = \sqrt{2}p, \quad p = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

また、 Q から軸までの距離は

$$PQ = \frac{1 - x - y}{\sqrt{2}} = \frac{1 - p^2 - (1-p)^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}p(1-p).$$

したがって

$$PQ = t - \frac{t^2}{\sqrt{2}}.$$



(3) 回転軸に垂直な断面は半径 PQ の円である。 $t = \sqrt{2}p$ より $dt = \sqrt{2} dp$ だから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{ \sqrt{2}p(1-p) \}^2 \sqrt{2} dp \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (p^2 - 2p^3 + p^4) dp \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{15}. \end{aligned}$$

端点 $p = 0, 1$ では半径が 0 となり、積分区間全体が図形 D を一度ずつ走る。

【総評】 難度 6、計算量 6、想定 20 分。平方根を u, v で一次化する方法と、曲線を $(p^2, (1-p)^2)$ で媒介表示する方法を用意した。どちらでも $t = \sqrt{2}p$ 、 $PQ = \sqrt{2}p(1-p)$ が得られ、体積 $\sqrt{2}\pi/15$ が一致する。