

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 1982 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

関数

$$f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x$$

の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値および最小値を求めよ。

第 2 問

条件

$$1 < x < 2^{n+1}, \quad 0 < y \leq \log_2 x$$

を満たす整数 x, y を座標とする点 (x, y) の個数を求めよ。ただし、 n は正の整数である。

第 3 問

yz 平面に接する球の xy 平面による切り口が、3 点

$$O = (0, 0, 0), \quad A = (1, \sqrt{3}, 0), \quad B = (4, 0, 0)$$

を頂点とする三角形の内接円である。この球の中心および半径を求めよ。

第 4 問

1つのさいころを r 回振る。第 i 回目に出る目の数を n_i とする。そのとき、次の問いに答えよ。

(1)

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}n_1n_2\cdots n_r\right) \neq 0$$

となる確率 P_1 を求めよ。

(2) r 回のうち、ちょうど k 個の i について

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}n_i\right) > 0$$

となる確率 P_2 を求めよ。

(3) $r > 2k > 0$ のとき、 $P_2 > P_1$ が成り立つことを示せ。

第 5 問

次の問いに答えよ。

(1) $k > 1$ のとき

$$x \log x \geq (1 + \log k)(x - k) + k \log k$$

が $x \geq 1$ に対して成り立つことを示せ。

(2) n を 2 以上の整数とする。このとき

$$a_n = \sum_{k=2}^n k \log k$$

とおけば、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a_n < \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x \, dx < \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left\{ \log \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right\} + 1.$$

ただし、対数はすべて自然対数とする。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)