

大阪大学 1982 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数

$$f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x$$

の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値および最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (導関数を因数分解する)

【方針】

導関数を $c = \cos x$ の多項式に直して因数分解する。二つの臨界点と端点での関数値を比較し、増減も確認する。

【解答】

三倍角・二倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos 3x - 4 \cos 2x + \cos x \\ &= 4 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - 2 \cos x + 4 \\ &= 2(\cos x - 2)(2 \cos^2 x - 1). \end{aligned}$$

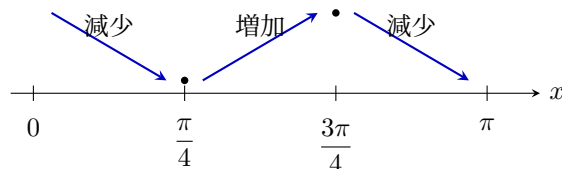
区間内では $-1 \leq \cos x \leq 1$ だから $\cos x - 2 < 0$ である。したがって

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

すなわち

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

である。導関数の符号は順に負、正、負となる。



端点と臨界点での値は

$$f(0) = f(\pi) = 0,$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} = -2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \frac{1}{3} \sin \frac{9\pi}{4} - 2 \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

よって

$$\text{最大値 } 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{最小値 } -2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

▶ 解法 2 (余弦を変数にする)

【方針】

三角関数を $\sin x$ と $\cos x$ にまとめ、 $u = \cos x$ と置く。閉区間 $[-1, 1]$ 上の関数として微分し、候補値を比較する。

【解答】

区間 $0 \leq x \leq \pi$ では $\sin x \geq 0$ である。三倍角・二倍角の公式から

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \sin x (4 \cos^2 x - 1) - 4 \sin x \cos x + \sin x \\ &= \frac{2}{3} \sin x (2 \cos^2 x - 6 \cos x + 1). \end{aligned}$$

ここで $u = \cos x$ とおくと、 $-1 \leq u \leq 1$ で

$$F(u) = \frac{2}{3} \sqrt{1-u^2} (2u^2 - 6u + 1)$$

の最大・最小を求めればよい。 $-1 < u < 1$ で微分すると

$$\begin{aligned} F'(u) &= \frac{2}{3\sqrt{1-u^2}} \{ (4u-6)(1-u^2) - u(2u^2-6u+1) \} \\ &= -\frac{2(u-2)(2u^2-1)}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

したがって内部の停留点は

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

だけである。端点では $F(\pm 1) = 0$ であり、

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

以上より

$$\text{最大値 } 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{最小値 } -2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5、目安 20 分。微分後の式を $\cos x$ の多項式として正確に因数分解できるかが中心である。標準解法では増減を直接追い、別解では $u = \cos x$ によって閉区間上の一変数関数へ移した。いずれも端点の値を忘れず比較することが重要である。

【第 2 問】

条件

$$1 < x < 2^{n+1}, \quad 0 < y \leq \log_2 x$$

を満たす整数 x, y を座標とする点 (x, y) の個数を求めよ。ただし、 n は正の整数である。

▶ 解法 1（高さを固定して数える）

【方針】

先に整数 y を固定する。対数条件を $2^y \leq x$ と読み替え、各水平列に並ぶ整数点の個数を足す。

【解答】

条件から

$$y \leq \log_2 x < n + 1$$

である。 y は正の整数だから

$$y = 1, 2, \dots, n$$

である。

一つの y を固定する。底が $2 > 1$ であるから

$$y \leq \log_2 x \iff 2^y \leq x.$$

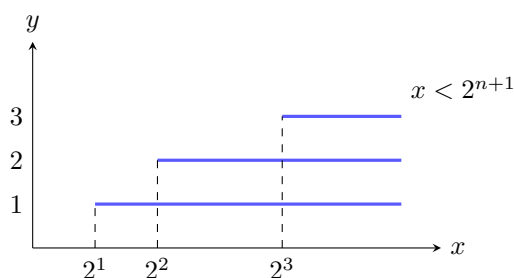
また、 x は整数なので

$$x = 2^y, 2^y + 1, \dots, 2^{n+1} - 1.$$

その個数は $2^{n+1} - 2^y$ 個である。したがって求める個数 N は

$$\begin{aligned} N &= \sum_{y=1}^n (2^{n+1} - 2^y) \\ &= n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

数え上げる領域は次のように、各高さ y で左端が 2^y となる階段状である。



よって答えは

$$(n-1)2^{n+1} + 2$$

個である。

▶ 解法 2 (二進区間に分ける)

【方針】

x を $2^j \leq x < 2^{j+1}$ という区間に分ける。この区間では $\lfloor \log_2 x \rfloor = j$ なので、各 x に対応する y の個数が一定になる。

【解答】

$j = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$2^j \leq x < 2^{j+1}$$

とする。この区間には整数 x が 2^j 個あり、各 x について

$$y = 1, 2, \dots, j$$

の j 個が条件を満たす。したがって求める個数は

$$N = \sum_{j=1}^n j 2^j$$

である。

この和を N において 2 倍し、添字をずらすと

$$2N = \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) 2^j.$$

元の式を引けば

$$\begin{aligned} N &= n 2^{n+1} - \sum_{j=1}^n 2^j \\ &= n 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) \\ &= (n-1) 2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

よって答えは

$$(n-1) 2^{n+1} + 2$$

個である。

【総評】 難度 5、計算量 4、目安 18 分。対数を含むが本質は整数格子点の数え上げである。水平列ごとに数える方法と、 x を二進区間に分ける方法を示した。端点 $x = 2^{n+1}$ が含まれないことを、 $2^{n+1} - 1$ までとして正しく処理する必要がある。

【第 3 問】

yz 平面に接する球の xy 平面による切り口が、3 点

$$O = (0, 0, 0), \quad A = (1, \sqrt{3}, 0), \quad B = (4, 0, 0)$$

を頂点とする三角形の内接円である。この球の中心および半径を求めよ。

▶ 解法 1 (内心と平面への距離を使う)

【方針】

切り口の中心と半径を三角形の内心・内接円半径として求める。球が yz 平面に接するので、球の半径は中心の x 座標の絶対値に等しい。

【解答】

三角形 OAB について

$$OA = 2, \quad OB = 4, \quad AB = 2\sqrt{3}, \quad [OAB] = 2\sqrt{3}.$$

したがって内接円の半径は

$$\rho = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1,$$

内心 I は次の点である。

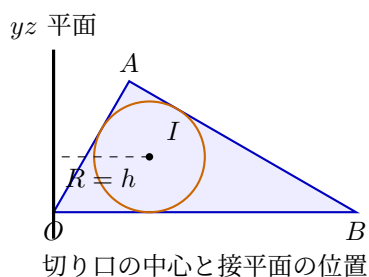
$$I = (3 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 0)$$

球の中心を $C = (h, k, t)$ 、半径を R とすると

$$h = 3 - \sqrt{3}, \quad k = \sqrt{3} - 1.$$

球は yz 平面、すなわち $x = 0$ に接するから

$$R = |h| = 3 - \sqrt{3}.$$



さらに切り口半径が ρ なので

$$R^2 = t^2 + \rho^2.$$

よって

$$\begin{aligned} t^2 &= (3 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 1)^2 \\ &= 8 - 4\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

したがって

$$C = (3 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, \pm(\sqrt{6} - \sqrt{2})), \quad R = 3 - \sqrt{3}.$$

▶ 解法 2 (球の方程式から決める)

【方針】

三辺までの距離を用いて切り口の円を決定し、その円が球の方程式を $z = 0$ としたものに一致する条件と、 $x = 0$ への接触条件を連立する。

【解答】

切り口の円の中心を $(h, k, 0)$ 、半径を ρ とする。三角形の三辺は

$$y = 0, \quad \sqrt{3}x - y = 0, \quad x + \sqrt{3}y - 4 = 0.$$

各辺までの距離が ρ であることから

$$k = \rho, \quad \frac{\sqrt{3}h - k}{2} = k, \quad \frac{4 - h - \sqrt{3}k}{2} = k.$$

これを解いて

$$h = 3 - \sqrt{3}, \quad k = \rho = \sqrt{3} - 1$$

を得る。

球を

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - t)^2 = R^2$$

と表す。 yz 平面 $x = 0$ に接することから

$$R = h = 3 - \sqrt{3}.$$

また $z = 0$ とおいた切り口の半径が ρ なので

$$R^2 - t^2 = \rho^2.$$

したがって

$$t^2 = (3 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 1)^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2.$$

ゆえに

$$C = (3 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, \pm(\sqrt{6} - \sqrt{2})), \quad R = 3 - \sqrt{3}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6、目安 28 分。文系第 4 問と切り口は同じだが、接する対象が z 軸ではなく yz 平面である。したがって球の半径は中心から平面 $x = 0$ までの距離、すなわち x 座標で決まる。内心の計算と球の高さの正負まで省略なく示した。

【第 4 問】

1 つのさいころを r 回振る。第 i 回目に出る目の数を n_i とする。そのとき、次の問いに答えよ。

(1)

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}n_1n_2\cdots n_r\right) \neq 0$$

となる確率 P_1 を求めよ。

(2) r 回のうち、ちょうど k 個の i について

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}n_i\right) > 0$$

となる確率 P_2 を求めよ。

(3) $r > 2k > 0$ のとき、 $P_2 > P_1$ が成り立つことを示せ。

▶ 解法 1 (確率の比を積で評価する)

【方針】

各目を 3 で割った余りによって分類して P_1, P_2 を求める。(3) では比 P_2/P_1 をとり、組合せ数を積の各因子で評価する。

【解答】

(1) 整数 N に対して

$$\sin \frac{2\pi N}{3} = 0 \iff 3 \mid N.$$

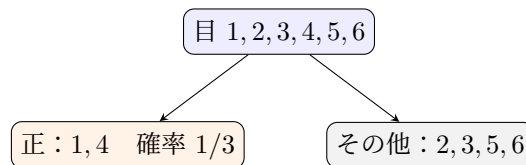
積 $n_1n_2\cdots n_r$ が 3 の倍数でないためには、すべての回で 3, 6 以外の目が出ればよい。したがって

$$P_1 = \left(\frac{4}{6}\right)^r = \left(\frac{2}{3}\right)^r.$$

(2) 条件を満たす目は 1, 4 の 2 個であり、1 回あたりの確率は $1/3$ である。よって

$$P_2 = {}_rC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{r-k}.$$

目の分類を図示すると次のようになる。



積が 3 の倍数でない：各回 1, 2, 4, 5 確率 $2/3$

(3) (1)、(2) より

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{{}_rC_k}{2^k}.$$

仮定から $r \geq 2k + 1$ なので

$${}_rC_k \geq {}_{2k+1}C_k.$$

さらに

$${}_{2k+1}C_k = \frac{(2k+1)(2k)\cdots(k+2)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

対応する分子の各因子は分母の各因子の 2 倍より大きいから

$${}_{2k+1}C_k > 2^k.$$

よって $P_2/P_1 > 1$ 、すなわち

$$P_2 > P_1.$$

▶ 解法 2 (組合せを集合として比較する)

【方針】

(1)、(2) の確率を標本数から直接数える。(3) では 2^k 個の相異なる k 元部分集合を構成し、それ以外の部分集合も存在することから組合せ数を評価する。

【解答】

(1) 各回に許される目は 1, 2, 4, 5 の 4 通りである。全事象は 6^r 通り、条件を満たす列は 4^r 通りなので

$$P_1 = \frac{4^r}{6^r} = \left(\frac{2}{3}\right)^r.$$

(2) $\sin(2\pi n_i/3) > 0$ となる目は 1, 4 の 2 通りである。該当する k 回の選び方が ${}_rC_k$ 通りであり、その回の目は各 2 通り、残りは各 4 通りだから

$$P_2 = \frac{{}_rC_k 2^k 4^{r-k}}{6^r} = {}_rC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{r-k}.$$

(3) したがって $P_2 > P_1$ を示すには

$${}_rC_k > 2^k$$

を示せばよい。 $r \geq 2k+1$ だから、まず $1, 2, \dots, 2k+1$ の中から k 個を選ぶ場合を考える。

k 組の対

$$\{1, k+1\}, \{2, k+2\}, \dots, \{k, 2k\}$$

の各対から 1 個ずつ選ぶと、相異なる k 元部分集合がちょうど 2^k 個できる。さらに

$$\{1, 2, \dots, k-1, 2k+1\}$$

はそのいずれにも含まれない。よって

$${}_{2k+1}C_k > 2^k.$$

したがって

$${}_rC_k \geq {}_{2k+1}C_k > 2^k$$

であり、 $P_2 > P_1$ が成り立つ。

【総評】 難度 7、計算量 5、目安 30 分。(1) は積が 3 の倍数になる条件、(2) は各回の正の事象を正確に分類する。(3) は確率の比から組合せ不等式へ帰着する。積による代数的評価と、対から 1 個ずつ選ぶ集合的評価を示し、高校範囲の組合せだけで厳密に証明した。

【第 5 問】

次の問いに答えよ。

(1) $k > 1$ のとき

$$x \log x \geq (1 + \log k)(x - k) + k \log k$$

が $x \geq 1$ に対して成り立つことを示せ。

(2) n を 2 以上の整数とする。このとき

$$a_n = \sum_{k=2}^n k \log k$$

とおけば、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a_n < \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x \, dx < \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left\{ \log \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right\} + 1.$$

ただし、対数はすべて自然対数とする。

▶ 解法 1 (接線不等式を区間ごとに積分する)

【方針】

(1) では両辺の差を微分し、 $x = k$ で最小値 0 をとることを示す。(2) ではその不等式を k を中心とする長さ 1 の区間で積分し、 $k = 2$ から n まで加える。

【解答】

(1)

$$h(x) = x \log x - \{(1 + \log k)(x - k) + k \log k\}$$

とおく。このとき

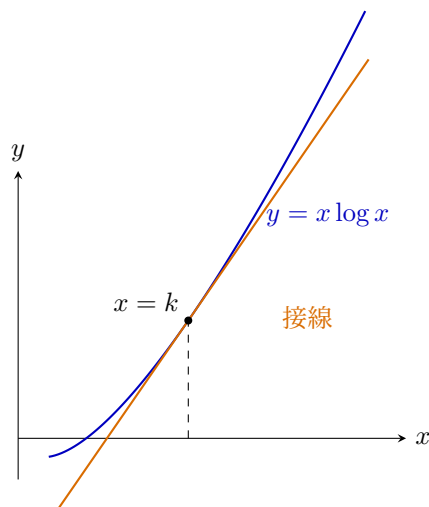
$$h'(x) = \log \frac{x}{k}.$$

したがって $1 \leq x < k$ では $h'(x) < 0$ 、 $x > k$ では $h'(x) > 0$ であり、 h は $x = k$ で最小になる。 $h(k) = 0$ だから

$$x \log x \geq (1 + \log k)(x - k) + k \log k$$

が成り立つ。

この関係は、曲線 $y = x \log x$ が $x = k$ における接線より上にあることを表す。



(2) (1) の不等式を、次の区間について積分する。

$$k - \frac{1}{2} \leq x \leq k + \frac{1}{2}$$

対称性により

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} (1 + \log k)(x - k) dx = 0$$

であり、等号成立は一点だけだから

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} x \log x dx > k \log k.$$

これを $k = 2, 3, \dots, n$ について加えると

$$a_n < \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x dx.$$

次に

$$\int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right)$$

である。 $N = n + 1/2$ とおけば

$$\int_{\frac{3}{2}}^N x \log x dx = \frac{N^2}{2} \left(\log N - \frac{1}{2} \right) - \frac{9}{8} \left(\log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

$\log(3/2) > 0$ より

$$-\frac{9}{8} \left(\log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) < \frac{9}{16} < 1.$$

したがって

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x dx < \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left\{ \log \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right\} + 1.$$

以上で二つの不等式が示された。

▶ 解法 2 (無次元化と対称化を使う)

【方針】

(1) では $u = x/k$ として差を $k(u \log u - u + 1)$ にする。(2) では $g(k+t) + g(k-t)$ を微分し、中点の値より大きいことを直接示す。

【解答】

(1) $u = x/k > 0$ とおくと、左辺から右辺を引いた差は

$$k(u \log u - u + 1)$$

である。 $\phi(u) = u \log u - u + 1$ とおけば

$$\phi'(u) = \log u.$$

よって ϕ は $u = 1$ で最小値 0 をとる。したがって差は 0 以上であり、求める不等式が成り立つ。

(2) $g(x) = x \log x$ とおく。 $0 < t \leq 1/2$ に対し

$$q(t) = g(k+t) + g(k-t) - 2g(k)$$

とおくと

$$q'(t) = g'(k+t) - g'(k-t) = \log \frac{k+t}{k-t} > 0.$$

しかも $q(0) = 0$ だから $q(t) > 0$ である。したがって

$$\begin{aligned} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} g(x) dx - k \log k &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{g(k+t) + g(k-t) - 2g(k)\} dt \\ &> 0. \end{aligned}$$

これを $k = 2, 3, \dots, n$ について加えて

$$a_n < \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x \, dx$$

を得る。

上側については原始関数

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right)$$

を用いる。 $N = n + 1/2$ とすれば

$$\int_{\frac{3}{2}}^N x \log x \, dx = G(N) - G\left(\frac{3}{2}\right).$$

また

$$-G\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8} \left(\log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) < \frac{9}{16} < 1.$$

ゆえに

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x \, dx < \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left\{ \log \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right\} + 1.$$

【総評】 難度 8、計算量 7、目安 35 分。接線不等式を、整数を中心とする長さ 1 の区間で積分する発想が核心である。標準解法は (1) をそのまま積分し、別解は左右対称な点の関数値を組にして平均を評価した。積分区間を連結すると端点が $3/2$ と $n + 1/2$ になること、上端評価の定数が 1 未満であることまで丁寧に確認した。