

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 1984 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

平行でない 2 直線

$$l_1 : p_1x + q_1y + 1 = 0$$

$$l_2 : p_2x + q_2y + 1 = 0$$

と, 1 次変換 f が与えられている. f が l_1 を l_2 にうつし l_2 を l_1 にうつす変換であるとき, 合成変換 $f \cdot f$ は恒等変換であることを示せ.

第 2 問

点 $(0, 1, 3)$ を通り，球 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ と接する直線の全体を考える．

- (1) 直線と球の接点の全体は 1 つの平面上にある．この平面の方程式を求めよ．
- (2) これらの直線が xy 平面と交わる点の全体は， xy 平面上の曲線となる．この曲線の方程式を求めよ．

第 3 問

点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ (頂点の番号は左回りにつける) を D で表す. D を点 O のまわりに角 2θ 回転した図形を $D_{2\theta}$ とし, この回転によって D の頂点 A_k はそれぞれ $D_{2\theta}$ の頂点 B_k にうつるものとする. θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{n}$ の範囲にあるとき, 次の問に答えよ.

- (1) 辺 A_1A_2 と辺 B_1B_n の交点を C とするとき, $\angle A_1OC = \theta$ を証明し, OC の長さを求めよ.
- (2) D と $D_{2\theta}$ が重なる部分の面積 $S(\theta)$ と, $S(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ.

第 4 問

$x \neq 1$ に対して $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ とおく. $n = 2, 3, \dots$ に対して $f_n(x) = x f_{n-1}(x) + n$ によって関数 $f_2(x), f_3(x), \dots$ を定義する. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(e^{\frac{1}{n}})}{n^2}$ を求めよ.

第 5 問

n 個の玉に 1 から n まで番号をつけ箱の中に入れる．この箱から k 個の玉をでたらめに取り出し，それらの玉の最大の番号を X とする．ただし n, k は $2 \leq k \leq n$ を満たす定まった整数である．

- (1) $i = 1, 2, \dots, n$ に対し， $X = i$ である確率 p_i を求めよ．
(2) 正の整数 l, m に対し

$$\sum_{i=1}^m i(i+1)\cdots(i+l-1) = \frac{m(m+1)\cdots(m+l)}{l+1}$$

を証明し，これを用いて X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)